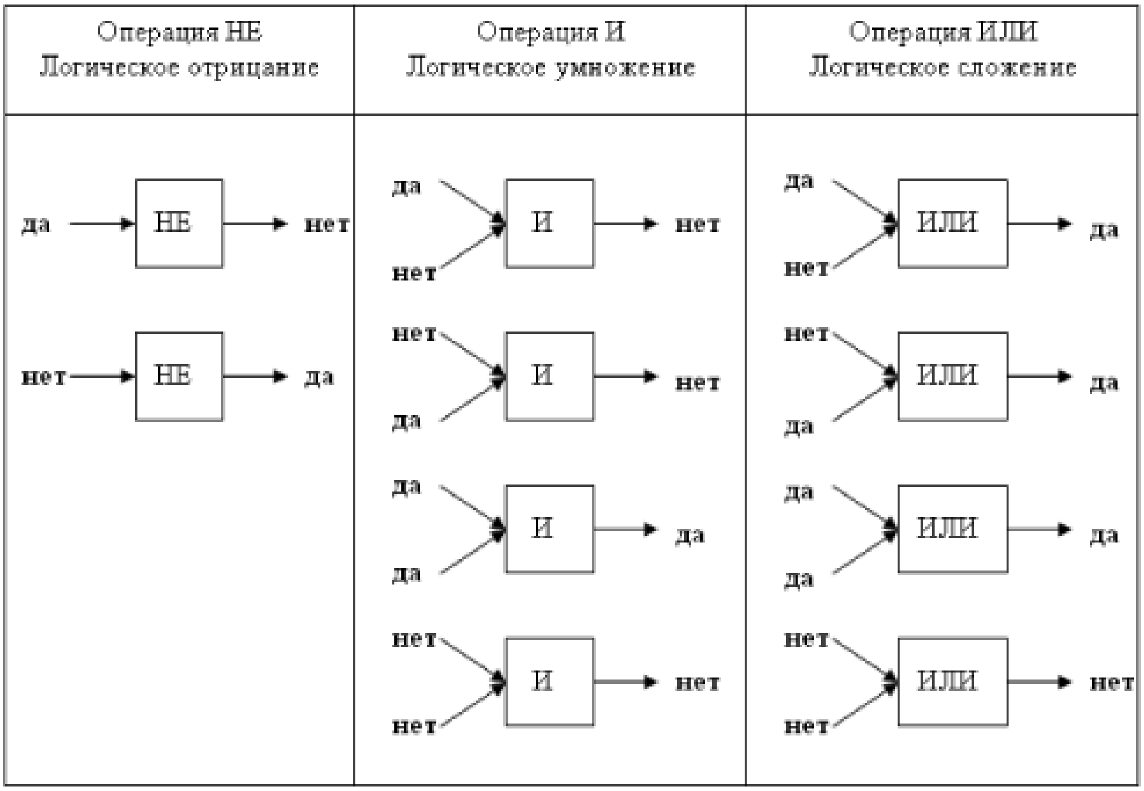
Лекция 09.
Тема 04. Понятие логической схемы (ЛС). Задачи анализа и синтеза ЛС. Синтез ЛС в заданном функциональном базисе.

Понятие логической схемы (ЛС).

Логические схемы нужны для того чтобы в наглядной графической форме отобразить последовательность выполнения операций при вычислении логических формул.

Входящие слева линии и цифры около них обозначают значения операндов, линия справа и соответствующая цифра - результат операции (значение на выходе логических элементов). 1 - это логическая единица (истина), 0 - логический ноль (ложь).

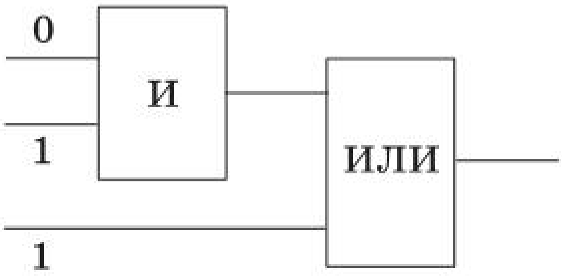
Таблицы истинности в форме логических схем будут выглядеть т.о.



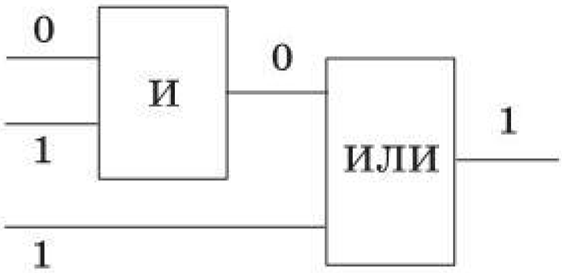
Пример 1. Нарисовать схему для логического выражения:

1 ИЛИ 0 и 1.

Читать эту схему надо слева направо. Первой выполняется операция И (что наглядно видно на схеме), затем ИЛИ.



Теперь в порядке слева направо припишем к выходящим линиям результаты операций:

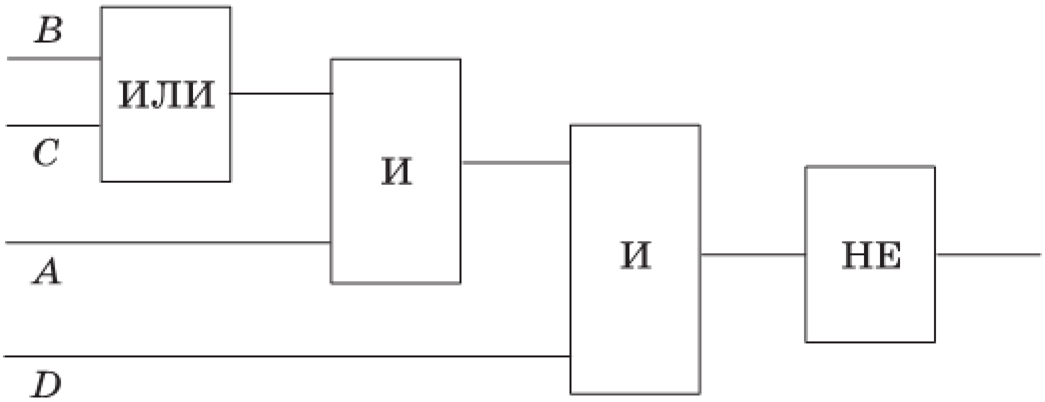


В результате получилась 1, т.е. "истина".

Пример 2. *Представить в виде логической схемы логическую формулу:*

НЕ (А И (В ИЛИ С) И D).

Логическая схема будет выглядеть так:



Теперь с помощью схемы рассчитаем значение формулы при A=C=D=1, B=0.
В результате получится логический ноль, т.е. "ложно".

Задача синтеза логической схемы

По заданной функции f требуется построить схему, реализующую данную функцию. Задача синтеза решается неоднозначно. Можно поставить в соответствие заданной функции f целое множество схем. Для построения логической схемы необходимо элементы, предназначенные для выполнения логических операций, указанных в логической функции, располагать в порядке, указанном в булевом выражении.

Пример – Построить логическую схему устройства, реализующего логическую функцию $f = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$ (рисунок 10.1).

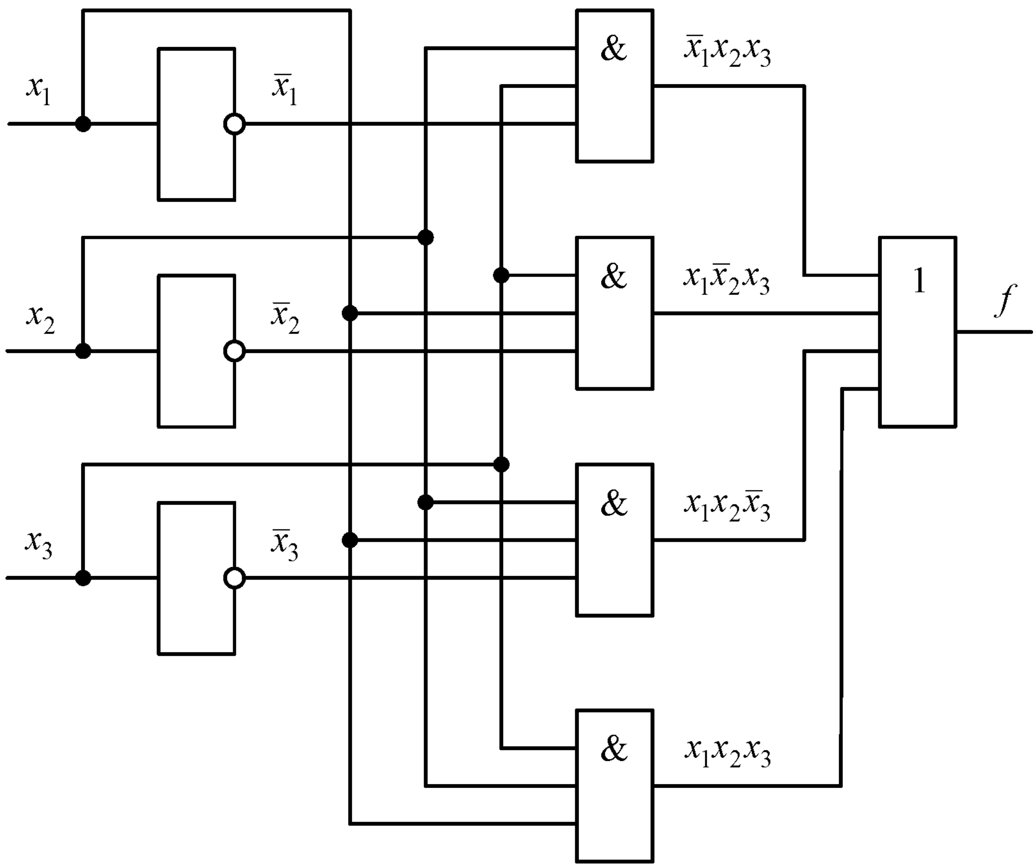


Рисунок 10.1 – Пример логической схемы устройства

Синтез логических устройств в заданном базисе

С целью уменьшения номенклатуры используемых микросхем часто пользуются функционально полной системой в составе двух логических элементов, выполняющих операции И-НЕ, ИЛИ-НЕ. Любую логическую функцию можно записать в заданном базисе логических элементов. Если задан базис И-НЕ, то путем двойного инвертирования исходного выражения или его части и применения теорем де Моргана логическая функция приводится к виду, содержащему только операции логического умножения и инвертирования. Если же задан базис ИЛИ-НЕ, исходную логическую функцию теми же приемами приводят к виду, содержащему только операции логического сложения и инверсии. Далее логическое выражение записывается через условные обозначения выбранных операций.

Пример – Заданную функцию *f* перевести в базисы И-НЕ и ИЛИ-НЕ. Исходная ДНФ в базисе И-НЕ имеет вид:

$$f = x_2x_4 \vee \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = \overline{\overline{x_2x_4 \vee \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3}} =$$
$$= \overline{(\overline{x_2x_4})(\overline{\bar{x}_1x_3\bar{x}_4})(\overline{x_1\bar{x}_2\bar{x}_3})} = (x_2 \mid x_4) \mid (\bar{x}_1 \mid x_3 \mid \bar{x}_4) \mid (x_1 \mid \bar{x}_2 \mid \bar{x}_3).$$

Аналогично КНФ в базисе ИЛИ-НЕ имеет вид:

$$f = \overline{\overline{(x_1 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)}} =$$
$$= \overline{\overline{(x_1 \vee x_4)} \vee \overline{(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)} \vee \overline{(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)}} =$$
$$= (x_1 \downarrow x_4) \downarrow (\bar{x}_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3) \downarrow (\bar{x}_2 \downarrow \bar{x}_3 \downarrow \bar{x}_4).$$

Пример – Пусть логическая функция задана выражением

$$f = x_1x_4 \vee \overline{(\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)}(x_2 \vee \bar{x}_3).$$

Привести логическую функцию в базис И-НЕ, ИЛИ-НЕ:

а) приводим функцию к базису И-НЕ:

$$f = f_1 \vee \overline{f_2} f_3 = f_1 \vee \overline{\overline{\overline{f_2} f_3}} = f_1 \vee \overline{(\overline{f_2} \mid f_3)} = \overline{\overline{f_1 \vee \overline{(\overline{f_2} \mid f_3)}}} = \overline{\overline{f_1} \wedge \overline{\overline{(\overline{f_2} \mid f_3)}}} = \overline{f}_1 \mid (\overline{f_2} \mid f_3);$$

$$\overline{f_1} = \overline{x_1x_4} = x_1 \mid x_4;$$

$$\overline{f_2} = \overline{\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4} = x_1\bar{x}_3x_4 = \overline{\overline{x_1\bar{x}_3x_4}} = \overline{x_1 \mid \bar{x}_3 \mid x_4};$$

$$f_3 = x_2 \vee \bar{x}_3 = \overline{\overline{x_2 \vee \bar{x}_3}} = \overline{\bar{x}_2x_3} = \bar{x}_2 \mid x_3;$$

$$f = (x_1 \mid x_4) \mid ((\overline{x_1 \mid \bar{x}_3 \mid x_4}) \mid (\bar{x}_2 \mid x_3));$$

б) приводим функцию к базису ИЛИ-НЕ:

$$f = f_1 \vee \overline{f_2} f_3 = f_1 \vee \overline{\overline{\overline{f_2} f_3}} = f_1 \vee \overline{(f_2 \vee \overline{f_3})} = \overline{\overline{f_1 \vee \overline{(f_2 \vee \overline{f_3})}}} = \overline{f_1 \downarrow (f_2 \downarrow \overline{f_3})};$$

$$f_1 = x_1x_4 = \overline{\overline{x_1x_4}} = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4} = \bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_4;$$

$$f_2 = \bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 = \overline{\overline{\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4}} = \overline{\bar{x}_1 \downarrow x_3 \downarrow \bar{x}_4}\,;$$

$$f_3 = x_2 \vee \bar{x}_3 = \overline{\overline{x_2 \vee \bar{x}_3}} = \overline{x_2 \downarrow \bar{x}_3} \Rightarrow \overline{f_3} = x_2 \downarrow \bar{x}_3\,;$$

$$f = \overline{(x_1 \downarrow x_4) \downarrow ((\overline{\bar{x}_1 \downarrow x_3 \downarrow \bar{x}_4}) \downarrow (x_2 \downarrow \bar{x}_3))}\,.$$

Задача анализа логической схемы

По заданной схеме требуется определить функцию *f*, реализуемую данной схемой.

При решении задачи анализа следует придерживаться следующей последовательности действий:

1) заданная схема разбивается по ярусам;

2) начиная с последнего, выходы каждого элемента обозначаются проиндексированными функциями в зависимости от яруса, к которому относится элемент;

3) записываются выходные функции каждого элемента в виде формул в соответствии с введенными обозначениями;

4) производится подстановка одних выходных функций через другие, используя входные переменные;

5) записывается получившаяся булева функция через входные переменные.

Пример – По заданной логической схеме (рисунок 10.2) составить булеву функцию.

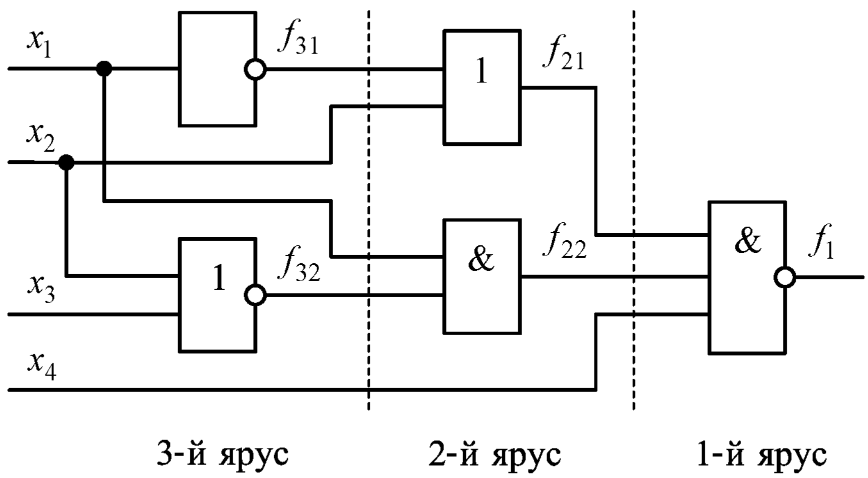


Рисунок 10.2 – Пример логической схемы устройства

Согласно приведенной выше последовательности действий произведем разбиение схемы на ярусы. Пронумеровав получившиеся ярусы, введем обозначения для каждой выходной функции (см. рисунок 3). Запишем все функции, начиная с 1-го яруса:

1) $f_1 = \overline{f_{21} \cdot f_{22} \cdot x_4}$;
2) a) $f_{21} = f_{31} \vee x_2$; b) $f_{22} = f_{32} \cdot x_1$;
3) a) $f_{31} = \overline{x_1}$; b) $f_{32} = \overline{x_2 \vee x_3}$.

Теперь запишем все функции, подставляя входные переменные $x_1, \ldots, x_4$:

a) $f_{21} = \overline{x_1} \vee x_2$;
b) $f_{22} = x_1 \cdot (\overline{x_2 \vee x_3})$.

В итоге получим выходную функцию

$$f = f_1 = \overline{x_1 \cdot (\overline{x_1} \vee x_2) \cdot (\overline{x_2 \vee x_3}) \cdot x_4}.$$

Литература

П39 Дискретная математика : учеб. пособие / А.Д. Плотников. — М. : Новое знание, 2005. — 288 с.
ISBN 5-94735-073-4.

https://youtu.be/5vHd6qgZTYY
https://youtu.be/QDhYWC-7yz0

Задания для самостоятельной работы

1 Синтезировать в базисе И-НЕ устройство, заданное логической функцией: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \overline{x_1 x_2}$.

2

Строгая дизъюнкция $x_1 \oplus x_2$ в базисе Пирса определяется формулой …

$(x_1 \downarrow x_2) \downarrow ((x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2))$

$((x_1 \downarrow x_1) \downarrow x_2) \downarrow ((x_1 \downarrow x_1) \downarrow x_2)$

$(x_1 \downarrow x_1) \downarrow ((x_1 \downarrow x_1) \downarrow x_2)$

$((x_1 \downarrow x_1) \downarrow x_2) \downarrow ((x_1 \downarrow x_1) \downarrow x_2)$

3

Система классификации получает на вход устройство, данные о котором заносит в таблицу «Оборудование» для дальнейшей обработки информации. Таблица содержит поля «Устройство», «Назначение» и «Год выпуска» с символьными именами A, B и C соответственно. Система формирует запросы в виде переключательных (логических) функций.

Установите соответствие между запросами к данным из таблицы и обратными запросами (инверсными функциями):

1) $\overline{(C=2014)\to(A=«monitor»)}\vee(A=«monitor»)$

2) $(A=«monitor»)\wedge((A=«monitor»)\to(C=2014))$

3) $(C=2014)\vee(\overline{(A=«monitor»)}\wedge\overline{(C=2014)})$

4) $\overline{(A=«monitor»)\vee(\overline{(A=«monitor»)}\wedge(C=2014))}$

- [ ] $((A=«monitor»)\to(C=2014))\wedge\overline{(C=2014)}$
- [ ] $\overline{((C=2014)\to(A=«monitor»))\wedge(C=2014)}$
- [ ] $\overline{\overline{(A=«monitor»)}\vee((A=«monitor»)\wedge(C=2014))}$
- [ ] $(C=2014)\vee((A=«monitor»)\wedge\overline{(C=2014)})$
- [ ] $((A=«monitor»)\to(C=2014))\wedge\overline{(A=«monitor»)\wedge(C=2014)}$

4

Система классификации получает на вход устройство, данные о котором заносит в таблицу «Оборудование» для дальнейшей обработки информации. Таблица содержит поля «Устройство», «Назначение» и «Год выпуска» с символьными именами A, B и C соответственно. Система формирует запросы в виде переключательных (логических) функций.

Поля записи являются аргументами функции
$(A=«monitor»)\wedge(B\neq«print»)\vee(A=«printer»)\wedge(C\neq 2003)$.

Значение этой функции истинно для записи со значениями полей …

- [ ] Устройство = «monitor», Назначение = «view», Год выпуска = 2003
- [ ] Устройство = «printer», Назначение = «view», Год выпуска = 2010
- [ ] Устройство = «printer», Назначение = «print», Год выпуска = 2003
- [ ] Устройство = «monitor», Назначение = «print», Год выпуска = 2012
- [ ] Устройство = «printer», Назначение = «view», Год выпуска = 2003

5

Система классификации получает на вход устройство, данные о котором заносит в таблицу «Оборудование» для дальнейшей обработки информации. Таблица содержит поля «Устройство», «Назначение» и «Год выпуска» с символьными именами A, B и C соответственно. Система формирует запросы в виде переключательных (логических) функций.

На момент проведения анализа в таблице базы данных была 41 запись. Поле «Оборудование» содержало только два типа значений: «printer» и «monitor», а поле «Год выпуска» – три типа значений: 2003, 2010, 2012. Запросу $(A\neq«printer»)\vee(C\neq 2012)$ удовлетворяло 37 записей.
Количество записей таблицы, отвечающих запросу $(A\neq«monitor»)\wedge(C=2012)$, равно …