МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ухтинский государственный технический университет»
(УГТУ)

Количественные методы

Методические указания

Ухта, УГТУ, 2015

УДК 004.43(076.5)
ББК 65.262.10 я7
Л 12

Лабызнава, Г. Г.

Л 12 Количественные методы [Текст] : метод. указания / Г. Г. Лабызнава. –
Ухта : УГТУ, 2015. – 43 с.

Методические указания предназначены для студентов бакалавриата, обучающихся по направлению 080100 Экономика. Они содержат варианты заданий лабораторных работ, расчётно-графической работы.

УДК 004.43(076.5)
ББК 65.262.10 я7

Методические указания рассмотрены и одобрены заседанием кафедры экономики от 20.11.2014 г. пр. №03.

Рецензент: О. В. Плюснина, доцент кафедры экономики Ухтинского государственного технического университета, к.э.н.

Редактор: С. С. Лебедева, инженер кафедры экономики Ухтинского государственного технического университета.

Корректор: А. Ю. Васина. Технический редактор: Л. П. Коровкина.

В методических указаниях учтены предложения рецензента и редактора.

План 2014 г., позиция 235.

Подписано в печать 15.12.2014 г. Компьютерный набор.

Объём 43 с. Тираж 100 экз. Заказ №291.

© Ухтинский государственный технический университет, 2015
169300, Республика Коми, г. Ухта, ул. Первомайская, д. 13.
Типография УГТУ.
169300, Республика Коми, г. Ухта, ул. Октябрьская, д. 13.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1 Применение численных методов в решении экономических задач	6
1.1 Решение уравнений с одним неизвестным	6
1.2 Решение систем линейных уравнений	6
1.3 Определенный интеграл	9
1.4 Решение дифференциальных уравнений	11
2 Решение задач оптимизации с помощью надстройки поиск решения	15
2.1 Линейная оптимизация.....	15
2.2 Транспортная задача	19
2.3 Задача о назначениях	22
2.4 Задачи дискретной оптимизации	28
2.5 Задачи нелинейной оптимизации	34
2.6 Динамическое моделирование (принцип оптимальности)	40
2.7 Балансовый метод и оптимальное планирование	41
Литература	43

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время процессы принятия решений в экономике и финансах опираются на достаточно широкий круг экономико-математических методов. Ни одно более или менее серьёзное решение, затрагивающее управление деятельностью отраслей или предприятий, распределение ресурсов, выбор наилучшего варианта развития, изучение рыночной конъюнктуры, прогнозирование, планирование и т. п., не осуществляется без предварительного математического моделирования конкретного процесса или его частей.

Особое место занимает экономико-математическое моделирование при решении вопросов финансирования и кредитования объектов, составления материальных, трудовых и финансовых балансов, отыскания наилучших способов вложения денежных средств, их движения в процессах производства и воспроизводства.

Важное место отводится экономико-математическим моделям в ценообразовании, прогнозировании конъюнктуры рынка и определении цен, моделям и методам анализа инвестиционных проектов, моделям в управлении финансами. Немалое место отводится моделям оптимального отраслевого и регионального регулирования – экономико-математическим моделям проекта развития отдельных отраслей промышленности.

В экономике оптимизационные задачи возникают в связи с многочисленностью возможных вариантов функционирования конкретного экономического объекта, когда появляется ситуация выбора варианта, наилучшего по некоторому критерию, характеризующему соответствующей целевой функцией (например, иметь минимум затрат, максимум продукции или прибыли).

Широкий круг специалистов в своей повседневной практике использует средства Microsoft Office, в частности необходимый компонент финансово-экономических расчётов – Microsoft Excel.

Пакет Excel содержит специальное средство – команду **Сервис/Поиск решения**, позволяющую реализовывать модели линейной, нелинейной и дискретной оптимизации.

Для приобретения необходимых практических навыков студентам предлагается ряд типовых экономических задач (об оптимальном использовании ограниченных ресурсов, об инвестициях, и др.).

В ходе лабораторных занятий требуется:

- разработать экономико-математическую модель задачи;
- получить решение задачи (реализовать ЭММ) с помощью надстройки.

Поиск решения (Excel);

- распечатать протокол решения (экспресс-отчёт).

Протокол решения должен содержать:

- фрагмент исходного рабочего листа Excel;

- диалоговое окно **Поиск решения**;

- фрагмент **Отчёт по результатам** или фрагмент рабочего листа Excel, содержащий результаты решения.

Кроме того, желательно включение в **Протокол** диалоговых окон: **Параметры поиска решения** и **Результаты поиска решения**, по указанию преподавателя – **Отчёт по устойчивости**.

Оформление лабораторной работы в полном объёме проводится студентом самостоятельно после лабораторных занятий в установленные преподавателем сроки.

Полный отчёт по лабораторной работе должен содержать:

1) постановку экономической задачи;

2) экономико-математическую модель с необходимыми комментариями по её элементам;

3) описание компьютерной информационной технологии получения оптимального решения;

4) предложения (рекомендации) лицу, ответственному за принятие решений, по оптимальному управленческому поведению.

К зачёту допускаются студенты, выполнившие все пункты задания и оформившие результаты в установленном порядке.

Для получения зачёта каждый студент должен:

1) знать теоретические основы лабораторного занятия;

2) уметь ответить на конкретные вопросы по содержанию выполненной лабораторной работы.

Студенты дневного отделения выполняют задания во время проведения лабораторных работ. Вариант задания даётся по списку преподавателя.

Студенты заочного обучения выполняют задания, как контрольную работу. Вариант задания выбирается по сумме трёх последних цифр зачётной книжки.

1 ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ В РЕШЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1.1 Решение уравнений с одним неизвестным

Задание. Рассчитать доходность ценных бумаг. Математическое описание доходности ценных бумаг осуществляется с помощью нелинейного уравнения.

№ вар.	У р а в н е н и е	№ вар.	У р а в н е н и е
1	$2x^3 - 3x + 1 = 0$	16	$x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$
2	$x^5 - x - 2 = 0$	17	$x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$
3	$x^4 - 3x^2 + 1 = 0$	18	$x^3 + 3x - 1 = 0$
4	$2x^3 + 4x - 1 = 0$	19	$x^4 - 10x^2 + 1 = 0$
5	$x^5 - 5x^3 + 2 = 0$	20	$2x^3 - 6x + 3 = 0$
6	$x^3 + 12x - 25 = 0$	21	$x^5 - 3x + 2 = 0$
7	$x^3 + 3x - 2 = 0$	22	$x^5 + 4x^2 - 5 = 0$
8	$x^3 - 5x + 5 = 0$	23	$2x^5 - 7x + 12 = 0$
9	$x^5 - 3x = 7$	24	$x^3 - 7x + 7 = 0$
10	$x^3 + 10x - 2 = 0$	25	$x^5 + 3x^3 = 6$
11	$x^5 - 3x^2 - 1 = 0$	26	$x^3 + 2x - 7 = 0$
12	$x^5 + 3x^3 - 2 = 0$	27	$x^3 + 10x - 10 = 0$
13	$x^5 - 3x^2 - x + 2 = 0$	28	$x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$
14	$x^3 - 12x + 4 = 0$	29	$x^4 + 3x^3 = 5$
15	$x^3 + 6x^2 - 7x + 2 = 0$	30	$x^5 + 6x^3 - 5 = 0$

1.2 Решение систем линейных уравнений

Задача. ОАО выпускает три вида продукции, используя сырьё трёх типов. Необходимые характеристики производства указаны в таблице:

Вид сырья	Расход сырья по видам продукции			Запас сырья
	1	2	3	
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3

Требуется определить объём выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

Пояснение к решению. Обозначим неизвестные объёмы выпуска продукции через x_1 , x_2 и x_3 . Тогда при условии полного расхода запасов для каждого

вида сырья можно записать балансовые соотношения, которые образуют систему трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим объёмы выпуска продукции по каждому виду.

Вариант	Расход сырья по видам продукции	Запас сырья
1	$A = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 21 \\ 14 & 8 & 15 \\ 19 & 16 & 14 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2003 \\ 1500 \\ 1500 \end{pmatrix}$
2	$A = \begin{pmatrix} 21 & 15 & 12 \\ 15 & 8 & 14 \\ 14 & 16 & 19 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2003 \\ 1500 \\ 1500 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} 19 & 15 & 14 \\ 14 & 8 & 15 \\ 12 & 15 & 21 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2003 \\ 1500 \\ 1500 \end{pmatrix}$
4	$A = \begin{pmatrix} 21 & 14 & 17 \\ 15 & 11 & 21 \\ 26 & 12 & 20 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1900 \\ 2100 \\ 2200 \end{pmatrix}$
5	$A = \begin{pmatrix} 17 & 14 & 21 \\ 21 & 11 & 15 \\ 20 & 12 & 26 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1900 \\ 2100 \\ 2200 \end{pmatrix}$
6	$A = \begin{pmatrix} 26 & 12 & 20 \\ 15 & 11 & 21 \\ 21 & 14 & 17 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1900 \\ 2100 \\ 2200 \end{pmatrix}$
7	$A = \begin{pmatrix} 2 & 35 & 35 \\ 14 & 46 & 46 \\ 20 & 8 & 8 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1500 \\ 3200 \\ 900 \end{pmatrix}$
8	$A = \begin{pmatrix} 35 & 35 & 2 \\ 46 & 46 & 14 \\ 8 & 8 & 20 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1500 \\ 3200 \\ 900 \end{pmatrix}$
9	$A = \begin{pmatrix} 20 & 8 & 8 \\ 14 & 46 & 46 \\ 2 & 35 & 35 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1500 \\ 3200 \\ 900 \end{pmatrix}$

Вариант	Расход сырья по видам продукции	Запас сырья
10	$A = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 67 \\ 25 & 5 & 46 \\ 35 & 46 & 20 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2500 \\ 2003 \\ 1500 \end{pmatrix}$
11	$A = \begin{pmatrix} 35 & 46 & 20 \\ 25 & 5 & 46 \\ 15 & 6 & 67 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2500 \\ 2003 \\ 1500 \end{pmatrix}$
12	$A = \begin{pmatrix} 67 & 6 & 15 \\ 46 & 5 & 25 \\ 20 & 46 & 35 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2500 \\ 2003 \\ 1500 \end{pmatrix}$
13	$A = \begin{pmatrix} 13 & 9 & 78 \\ 25 & 5 & 46 \\ 35 & 46 & 20 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 4000 \\ 2500 \\ 3500 \end{pmatrix}$
14	$A = \begin{pmatrix} 78 & 9 & 13 \\ 46 & 5 & 25 \\ 20 & 46 & 35 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 4000 \\ 2500 \\ 3500 \end{pmatrix}$
15	$A = \begin{pmatrix} 35 & 46 & 20 \\ 25 & 5 & 46 \\ 13 & 9 & 78 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 4000 \\ 2500 \\ 3500 \end{pmatrix}$
16	$A = \begin{pmatrix} 8 & 25 & 10 \\ 4 & 14 & 25 \\ 32 & 22 & 10 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1500 \\ 2003 \\ 1500 \end{pmatrix}$
17	$A = \begin{pmatrix} 10 & 25 & 8 \\ 25 & 14 & 4 \\ 10 & 22 & 32 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1500 \\ 2003 \\ 1500 \end{pmatrix}$
18	$A = \begin{pmatrix} 32 & 22 & 10 \\ 4 & 14 & 25 \\ 8 & 25 & 10 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1500 \\ 2003 \\ 1500 \end{pmatrix}$
19	$A = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 21 \\ 14 & 8 & 25 \\ 19 & 16 & 10 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2800 \\ 3000 \\ 2200 \end{pmatrix}$
20	$A = \begin{pmatrix} 21 & 15 & 12 \\ 25 & 8 & 14 \\ 10 & 16 & 19 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2800 \\ 3000 \\ 2200 \end{pmatrix}$
21	$A = \begin{pmatrix} 19 & 16 & 10 \\ 14 & 8 & 25 \\ 12 & 15 & 21 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2800 \\ 3000 \\ 2200 \end{pmatrix}$

Вариант	Расход сырья по видам продукции	Запас сырья
22	$A = \begin{pmatrix} 14 & 6 & 4 \\ 17 & 10 & 9 \\ 15 & 11 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1500 \\ 2500 \\ 2000 \end{pmatrix}$
23	$A = \begin{pmatrix} 15 & 11 & 6 \\ 17 & 10 & 9 \\ 14 & 6 & 4 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1500 \\ 2500 \\ 2000 \end{pmatrix}$
24	$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 9 & 10 & 17 \\ 6 & 11 & 15 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1500 \\ 2500 \\ 2000 \end{pmatrix}$
25	$A = \begin{pmatrix} 14 & 6 & 4 \\ 17 & 10 & 9 \\ 15 & 11 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2500 \\ 4000 \\ 3500 \end{pmatrix}$
26	$A = \begin{pmatrix} 15 & 11 & 6 \\ 17 & 10 & 9 \\ 14 & 6 & 4 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2500 \\ 4000 \\ 3500 \end{pmatrix}$
27	$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 9 & 10 & 17 \\ 6 & 11 & 15 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2500 \\ 4000 \\ 3500 \end{pmatrix}$
28	$A = \begin{pmatrix} 20 & 3 & 9 \\ 14 & 10 & 12 \\ 25 & 11 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1500 \\ 1500 \\ 2003 \end{pmatrix}$
29	$A = \begin{pmatrix} 25 & 11 & 6 \\ 14 & 10 & 12 \\ 20 & 3 & 9 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1500 \\ 1500 \\ 2003 \end{pmatrix}$
30	$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 20 \\ 12 & 10 & 14 \\ 6 & 11 & 25 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1500 \\ 1500 \\ 2003 \end{pmatrix}$

1.3 Определённый интеграл

Задание. Вычислить стоимость непрерывного потока выплат генеральному подрядчику на момент времени x с помощью определённого интеграла.

Вариант	Метод прямоугольников	Метод трапеций
1	$\int_{0,1}^{1,1} (1 - \sqrt{x}) dx$	$\int_{0,6}^{1,6} (\sqrt{x+1}) \operatorname{tg} 2x dx$

Вариант	Метод прямоугольников	Метод трапеций
2	$\int_{1,6}^{2,6} \frac{x}{2} \lg\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$	$\int_{0,2}^{2,2} \frac{x+0,5}{\sqrt{x^2+1}} dx$
3	$\int_0^1 e^{-x} \frac{1+x^2}{1+x^3} dx$	$\int_{0,2}^{2,2} \frac{x+0,5}{\sqrt{x^2+1}} dx$
4	$\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$	$\int_{-0,8}^{1,8} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+4}}$
5	$\int_{-0,1}^{0,9} \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+x^2}} dx$	$\int_{0,4}^{2,4} \frac{x+2,2}{\sqrt{x^2+1}} dx$
6	$\int_{0,8}^{1,8} \frac{\lg(x^2+1)}{x+1} dx$	$\int_{1,2}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$
7	$\int_{1,2}^{2,2} \frac{\lg(x+2)}{x} dx$	$\int_3^4 x(\ln x - 1) dx$
8	$\int_{2,5}^{3,5} \frac{\lg(x^2+0,8)}{x-1} dx$	$\int_0^1 \frac{e^{x/2}}{\sqrt{1+x}} dx$
9	$\int_1^2 \frac{\ln x}{1+\ln x} dx$	$\int_0^{\pi/2} e^{-2x} \sin^2 x dx$
10	$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}}{e^x} dx$	$\int_{0,1}^{1,1} \frac{dx}{2+\ln x}$
11	$\int_0^1 e^x \frac{1+x}{1+x^2} dx$	$\int_{0,1}^{1,1} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^2 dx$
12	$\int_0^1 \frac{xdx}{1+e^{-x}}$	$\int_{0,1}^{1,1} \ln x \ln(1+x) dx$
13	$\int_{0,1}^{\ln 2} \frac{xdx}{e^x + 2e^{-x} - 2}$	$\int_{0,1}^{1,1} \ln x \ln(1+x) dx$
14	$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} \cos x dx$	$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x+1) dx$
15	$\int_{0,2}^{1,2} \frac{1+x^2}{1+x^3} dx$	$\int_{0,3}^{3,3} x^2 \lg x dx$
16	$\int_{1,2}^{2,2} \frac{\lg(x+2)}{x} dx$	$\int_{0,1}^{\pi/3} \ln \cos x dx$
17	$\int_{1,6}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2,5}}$	$\int_{0,1}^{\pi/3} \ln \cos x dx$

Вариант	Метод прямоугольников	Метод трапеций
18	$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$\int_{0,1}^{\pi/2} (\ln \sin x)^2 dx$
19	$\int_{0,4}^{1,4} \sqrt{x} \cos x^2 dx$	$\int_{0,1}^{1,1} \frac{\ln x}{5 - x} dx$
20	$\int_{0,8}^{1,8} \frac{\sin 2x}{x^2} dx$	$\int_{0,1}^{1,1} \frac{\ln x}{x + 1} dx$
21	$\int_1^2 \frac{\ln x}{1 + x^3} dx$	$\int_{2,2}^{3,2} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 1}}$
22	$\int_{0,2}^{1,2} \frac{1 + x^2}{1 + x^3} dx$	$\int_{0,2}^{1,6} \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$
23	$\int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9 + x^2} dx$	$\int_{0,6}^{1,6} (x^2 + 1) \sin(x - 0,5) dx$
24	$\int_2^3 x \sqrt{\lg x} dx$	$\int_{0,1}^{1,1} \sqrt{x + 1} \lg(x + 3) dx$
25	$\int_0^{\pi/2} \cos 2x \cos^2 x dx$	$\int_{0,3}^3 x^2 \lg x dx$
26	$\int_0^{2\pi} (1 - \cos x)^2 \sin 2x dx$	$\int_{0,1}^{1,1} \frac{x^2}{\sqrt{\ln 1/x}} dx$
27	$\int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x dx$	$\int_3^4 x(\ln x - 1) dx$
28	$\int_0^{\pi/2} x \operatorname{ctg} x dx$	$\int_{0,1}^{1,1} \frac{x^8}{(1 - x - x^2)} dx$
29	$\int_0^{\pi/4} \frac{xdx}{(\sin x + \cos x) \cos x}$	$\int_1^2 \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{1 + x} dx$
30	$\int_{0,1}^{1,1} \cos 2x \sqrt{ 1 - x^2 } dx$	$\int_1^2 \frac{x^2 + \ln x}{1 + x^2} dx$

1.4 Решение дифференциальных уравнений

Задание. Исследовать насыщение рынка ценных бумаг. Математическое описание насыщения рынка ценных бумаг осуществляется с помощью обыкновенного дифференциального уравнения с начальными условиями на отрезке $[0;1]$ с шагом $h = 0,1$.

Примечание: для чётных вариантов использовать метод Эйлера, для нечётных – метод Рунге-Кутты.

Номер варианта	Уравнение	Номер варианта	Уравнение
1	$y' = \cos(x + y) + 0,6(x - y)$ $y(0) = 0$	16	$y' = 0,2x + y^2$ $y(0) = 0,1$
2	$y' = 0,4x^2 + y^2$ $y(0) = 0,8$	17	$y' = xy + y^2$ $y(0) = 0,6$
3	$y' = \cos(x + y) + 0,7x$ $y(0) = 0$	18	$y' = 0,6 \sin x - 1,25y^2 + 1$ $y(0) = 0$
4	$y' = x + \cos(y/2)$ $y(0) = 1$	19	$y' = x + \sin(y/\sqrt{11})$ $y(0) = \sqrt{11}$
5	$y' = x + \cos(y/3)$ $y(0) = 1,2$	20	$y' = 1 + 0,2y \sin x - y^2$ $y(0) = 0$
6	$y' = \cos(x)/(x + 1) - 0,5y^2$ $y(0) = 0$	21	$y' = \cos(1,5x + y) + (x - y)$ $y(0) = 0$
7	$y' = x + \cos(y/\sqrt{5})$ $y(0) = 1,4$	22	$y' = (1 - y^2)\cos(x) + 0,6y$ $y(0) = 0$
8	$y' = x^2 + xy$ $y(0) = 0,2$	23	$y' = 0,1x + 0,2y^2$ $y(0) = 0,3$
9	$y' = 2 \cos(x + y) + 0,75(x + y)$ $y(0) = 0$	24	$y' = 3x + 0,1y^2$ $y(0) = 0,4$
10	$y' = 1 + 0,4y \sin x - 1,5y^2$ $y(0) = 0$	25	$y' = 1 - 0,8y \sin x - 2y^2$ $y(0) = 0,4$
11	$y' = 1 - (x - 1)\sin y + (x + y)$ $y(0) = 0$	26	$y' = x + \sin(y/\sqrt{1,5})$ $y(0) = \sqrt{1,8}$
12	$y' = 0,2x^2 + y^2$ $y(0) = 0,7$	27	$y' = 0,1xy + 0,3y^2$ $y(0) = 0,2$
13	$y' = 0,1x^2 + 2xy$ $y(0) = 0,4$	28	$y' = 0,2x + 3y^2$ $y(0) = 0,4$
14	$y' = 0,2xy + y^2$ $y(0) = 0,4$	29	$y' = x^2 + xy$ $y(0) = 0,2$
15	$y' = xy + y^2$ $y(0) = 0,6$	30	$y' = 0,4x^2 + y^2$ $y(0) = 0,8$

1.5 Аппроксимация экспериментальных данных

Задание. Даны две наблюдаемые величины X и Y : количество вложенных в производство товаров средств и полученная в результате прибыль.

Построить функцию, наилучшим образом отражающую данную зависимость.

Найти коэффициенты A и B полученной зависимости.

Вычислить значения Y_N для независимой переменной X_N , используя найденные коэффициенты A и B .

Найти значения Y_1 и Y_2 для X_1 и X_2 .

Номер варианта	Таблица данных								
	x	y							
1	x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
	y	0,4	1,7	3,8	6,9	10,6	15,1	20,7	27,3
	$x_1 = 1,235$					$x_2 = 3,871$			
2	x	0,8	1,3	1,8	2,3	2,8	3,3	3,8	4,3
	y	61,3	55,2	49,8	45,1	41,3	38,3	36,0	34,6
	$x_1 = 2,529$					$x_2 = 3,982$			
3	x	2,3	2,8	3,3	3,8	4,3	4,8	5,3	5,8
	y	56,7	55,3	53,0	50,0	46,2	41,5	36,1	30,0
	$x_1 = 2,721$					$x_2 = 4,981$			
4	x	0,4	0,9	1,4	1,9	2,4	2,9	3,4	3,9
	y	40,0	33,9	28,5	23,8	20,0	17,0	14,7	13,3
	$x_1 = 1,581$					$x_2 = 2,683$			
5	x	1,6	2,1	2,6	3,1	3,6	4,1	4,6	5,1
	y	49,3	47,9	45,6	42,6	38,8	34,1	28,7	22,6
	$x_1 = 2,871$					$x_2 = 4,593$			
6	x	2,2	2,7	3,2	3,7	4,2	4,7	5,2	5,7
	y	41,5	40,1	37,8	34,8	31,0	26,3	20,9	14,8
	$x_1 = 1,932$					$x_2 = 2,291$			
7	x	0,3	0,8	1,3	1,8	2,3	2,8	3,3	3,8
	y	55,2	49,1	43,7	39,0	35,2	32,2	29,9	28,5
	$x_1 = 2,921$					$x_2 = 0,851$			
8	x	1,9	2,4	2,9	3,4	3,9	4,4	4,9	5,4
	y	55,4	54,0	51,7	48,7	44,9	40,2	34,8	28,7
	$x_1 = 2,371$					$x_2 = 4,632$			
9	x	1,2	1,7	2,2	2,7	3,2	3,7	4,2	4,7
	y	36,6	35,2	32,9	29,9	26,1	21,4	16,0	9,9
	$x_1 = 2,921$					$x_2 = 4,121$			
10	x	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5
	y	60,1	54,0	48,6	43,9	40,1	37,1	34,8	33,4
	$x_1 = 2,783$					$x_2 = 4,821$			

Номер варианта	Таблица данных								
	11	x	1,8	2,3	2,8	3,3	3,8	4,3	4,8
y		58,2	56,8	54,5	51,5	47,7	43,0	37,6	31,5
$x_1 = 2,892$					$x_2 = 3,921$				
12	x	0,7	1,2	1,7	2,2	2,7	3,2	3,7	4,2
	y	38,5	32,4	27,0	22,3	18,5	15,5	13,2	11,8
	$x_1 = 2,574$					$x_2 = 2,893$			
13	x	2,4	2,9	3,4	3,9	4,4	4,9	5,4	5,9
	y	52,9	51,5	49,2	46,2	42,4	37,7	32,3	26,2
	$x_1 = 4,721$					$x_2 = 5,674$			
14	x	0,2	0,7	1,2	1,7	2,2	2,7	3,2	3,7
	y	43,8	37,7	32,3	27,6	23,8	20,8	18,5	17,1
	$x_1 = 2,371$					$x_2 = 2,831$			
15	x	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,5
	y	40,9	39,5	37,2	34,2	30,4	25,7	20,3	14,2
	$x_1 = 3,281$					$x_2 = 3,982$			
16	x	2,9	3,4	3,9	4,4	4,9	5,4	5,9	6,4
	y	55,8	49,7	44,3	39,6	35,8	32,8	30,5	29,7
	$x_1 = 3,724$					$x_2 = 5,923$			
17	x	2,6	3,1	3,6	4,1	4,6	5,1	5,6	6,1
	y	45,1	43,7	41,4	38,4	34,6	29,9	24,5	18,4
	$x_1 = 3,581$					$x_2 = 4,791$			
18	x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
	y	41,6	35,5	30,1	25,4	21,6	18,6	16,3	14,9
	$x_1 = 1,879$					$x_2 = 2,372$			
19	x	2,8	3,3	3,8	4,3	4,8	5,3	5,8	6,3
	y	46,6	45,2	42,9	39,9	36,1	31,4	26,0	19,9
	$x_1 = 3,924$					$x_2 = 5,473$			
20	x	2,1	2,6	3,1	3,6	4,1	4,6	5,1	5,6
	y	50,1	44,0	38,6	33,9	30,1	27,1	24,8	23,4
	$x_1 = 4,875$					$x_2 = 2,697$			
21	x	1,7	2,2	2,7	3,2	3,7	4,2	4,7	5,2
	y	48,0	46,6	44,3	41,3	37,5	32,8	27,4	21,3
	$x_1 = 3,873$					$x_2 = 4,298$			
22	x	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
	y	48,7	42,6	37,2	32,5	28,7	25,7	23,4	22,0
	$x_1 = 2,894$					$x_2 = 4,281$			
23	x	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
	y	44,5	43,1	40,8	37,8	34,0	29,3	23,9	17,8
	$x_1 = 3,421$					$x_2 = 2,581$			

Номер варианта	Таблица данных								
	24	x	1,4	1,9	2,4	2,9	3,4	3,9	4,4
y		52,2	46,1	40,7	36,0	32,2	29,2	26,9	25,5
$x_1 = 2,475$					$x_2 = 3,721$				
25	x	0,1	0,6	1,1	1,6	2,1	2,6	3,1	3,6
	y	47,0	40,9	35,5	30,8	27,0	24,0	21,7	20,3
	$x_1 = 1,723$					$x_2 = 3,324$			
26	x	0,7	1,2	1,7	2,2	2,7	3,2	3,7	4,2
	y	37,5	33,4	26,0	21,3	17,5	14,5	12,2	10,8
	$x_1 = 3,564$					$x_2 = 2,893$			
27	x	2,4	2,9	3,4	3,9	4,4	4,9	5,4	5,9
	y	51,9	50,5	48,2	47,2	41,4	36,7	31,3	25,2
	$x_1 = 3,635$					$x_2 = 5,683$			
28	x	0,2	0,7	1,2	1,7	2,2	2,7	3,2	3,7
	y	43,8	37,7	32,3	27,6	23,8	20,8	18,5	17,1
	$x_1 = 2,371$					$x_2 = 2,831$			
29	x	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,5
	y	40,9	38,5	36,2	33,2	30,4	25,7	21,3	15,2
	$x_1 = 3,526$					$x_2 = 3,864$			
30	x	1,9	2,4	2,9	3,4	3,9	4,4	4,9	5,4
	y	54,8	48,7	43,3	38,6	34,8	31,8	30,5	29,6
	$x_1 = 3,524$					$x_2 = 5,823$			

2 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ С ПОМОЩЬЮ НАДСТРОЙКИ ПОИСК РЕШЕНИЯ

Пакет Excel содержит программу (надстройку) Поиск решения, позволяющую реализовывать модели линейной, нелинейной и дискретной оптимизации.

2.1 Линейная оптимизация

Задача 1 (для вариантов 1-16)

Для реализации двух товаров A и B коммерческое предприятие располагает тремя видами ограниченных материально-денежных ресурсов: трудовые, сырьё, финансы, в количестве p_1, p_2, p_3 единиц. При этом для продажи первой группы товаров A на 1 тыс. руб. товарооборота расходуется ресурса первого вида в количестве a_1 единиц, ресурса второго вида – в количестве a_2 единиц, ресурса третьего вида – в количестве a_3 единиц. Для продажи второй группы товаров B на 1 тыс. руб. товарооборота расходуется соответственно ресурса

первого вида в количестве b_1 единиц, ресурсов второго вида – в количестве b_2 единиц, ресурсов третьего вида – в количестве b_3 единиц. Доход от продажи группы товаров A на 1 тыс. руб. товарооборота составляет α руб., а группы товаров B – β (тыс. руб.).

Определите плановый объём и структуру товарооборота так, чтобы доход торгового предприятия был максимальным.

Задача 2 (для вариантов 17-30)

Для производства двух видов изделий A и B используются три типа технологического оборудования. На производство единицы изделия A оборудование первого типа используется a_1 ч., оборудование второго типа – a_2 ч., а оборудование третьего типа – a_3 ч. На производство единицы изделия B оборудование первого типа используется b_1 ч., оборудование второго типа – b_2 ч., а оборудование третьего типа – b_3 ч. На изготовление всех изделий администрация предприятия может предоставить оборудование первого типа не более чем на t_1 ч., оборудование второго типа не более чем на t_2 ч., оборудование третьего типа не более чем на t_3 ч. Прибыль от реализации единицы готового изделия A составляет α руб., а изделия B – β руб.

Составить план производства изделий A и B , обеспечивающий максимальную прибыль от реализации.

Варианты:

Вариант 1	$a_1=3,$ $a_2=4,$ $a_3=3,$	$b_1=5,$ $b_2=8,$ $b_3=11,$	$p_1=453,$ $p_2=616,$ $p_3=627,$	$\alpha=2,$ $\beta=3.$
Вариант 2	$a_1=9,$ $a_2=7,$ $a_3=4,$	$b_1=5,$ $b_2=8,$ $b_3=16,$	$p_1=1431,$ $p_2=1224,$ $p_3=1328,$	$\alpha=3,$ $\beta=2.$
Вариант 3	$a_1=10,$ $a_2=5,$ $a_3=4,$	$b_1=9,$ $b_2=11,$ $b_3=15,$	$p_1=1870,$ $p_2=1455,$ $p_3=1815,$	$\alpha=7,$ $\beta=9.$
Вариант 4	$a_1=11,$ $a_2=8,$ $a_3=5,$	$b_1=3,$ $b_2=4,$ $b_3=3,$	$p_1=671,$ $p_2=588,$ $p_3=423,$	$\alpha=5,$ $\beta=2.$
Вариант 5	$a_1=16,$ $a_2=8,$ $a_3=5,$	$b_1=4,$ $b_2=7,$ $b_3=9,$	$p_1=784,$ $p_2=552,$ $p_3=567,$	$\alpha=4,$ $\beta=6.$

Вариант 6	$a_1=20,$ $a_2=15,$ $a_3=14,$	$b_1=28,$ $b_2=9,$ $b_3=1,$	$p_1=758,$ $p_2=526,$ $p_3=541,$	$\alpha=10,$ $\beta=2.$
Вариант 7	$a_1=15,$ $a_2=15,$ $a_3=9,$	$b_1=33,$ $b_2=25,$ $b_3=3,$	$p_1=571,$ $p_2=577,$ $p_3=445,$	$\alpha=8,$ $\beta=10.$
Вариант 8	$a_1=11,$ $a_2=13,$ $a_3=13,$	$b_1=21,$ $b_2=15,$ $b_3=3,$	$p_1=741,$ $p_2=741,$ $p_3=822,$	$\alpha=5,$ $\beta=3.$
Вариант 9	$a_1=6,$ $a_2=5,$ $a_3=3,$	$b_1=3,$ $b_2=10,$ $b_3=12,$	$p_1=714,$ $p_2=910,$ $p_3=948,$	$\alpha=3.$ $\beta=9.$
Вариант 10	$a_1=9,$ $a_2=6,$ $a_3=3,$	$b_1=4,$ $b_2=7,$ $b_3=8,$	$p_1=801,$ $p_2=807,$ $p_3=768,$	$\alpha=3.$ $\beta=2.$
Вариант 11	$a_1=15,$ $a_2=11,$ $a_3=9,$	$b_1=4,$ $b_2=5,$ $b_3=10,$	$p_1=1095,$ $p_2=865,$ $p_3=1080,$	$\alpha=3,$ $\beta=2.$
Вариант 12	$a_1=12,$ $a_2=10,$ $a_3=3,$	$b_1=3,$ $b_2=5,$ $b_3=6,$	$p_1=684,$ $p_2=690,$ $p_3=558,$	$\alpha=6,$ $\beta=2.$
Вариант 13	$a_1=8,$ $a_2=7,$ $a_3=4,$	$b_1=3,$ $b_2=6,$ $b_3=9,$	$p_1=864,$ $p_2=864,$ $p_3=945,$	$\alpha=2,$ $\beta=3.$
Вариант 14	$a_1=14,$ $a_2=12,$ $a_3=8,$	$b_1=8,$ $b_2=4,$ $b_3=2,$	$p_1=624,$ $p_2=541,$ $p_3=376,$	$\alpha=7,$ $\beta=3.$
Вариант 15	$a_1=19,$ $a_2=16,$ $a_3=19,$	$b_1=26,$ $b_2=17,$ $b_3=8,$	$p_1=868,$ $p_2=638,$ $p_3=853,$	$\alpha=5,$ $\beta=4.$
Вариант 16	$a_1=14,$ $a_2=15,$ $a_3=20,$	$b_1=40,$ $b_2=27,$ $b_3=4,$	$p_1=1200,$ $p_2=993,$ $p_3=1097,$	$\alpha=5,$ $\beta=13.$
Вариант 17	$a_1=6,$ $a_2=4,$ $a_3=3,$	$b_1=2,$ $b_2=3,$ $b_3=4,$	$t_1=600,$ $t_2=520,$ $t_3=600,$	$\alpha=6,$ $\beta=3.$

Вариант 18	$a_1=5,$ $a_2=4,$ $a_3=3,$	$b_1=3,$ $b_2=3,$ $b_3=4,$	$t_1=750,$ $t_2=630,$ $t_3=700,$	$\alpha=5,$ $\beta=6.$
Вариант 19	$a_1=5,$ $a_2=3,$ $a_3=2,$	$b_1=2,$ $b_2=3,$ $b_3=3,$	$t_1=505,$ $t_2=393,$ $t_3=348,$	$\alpha=7,$ $\beta=4.$
Вариант 20	$a_1=7,$ $a_2=6,$ $a_3=1,$	$b_1=3,$ $b_2=3,$ $b_3=2,$	$t_1=1365,$ $t_2=1245,$ $t_3=650,$	$\alpha=6,$ $\beta=5.$
Вариант 21	$a_1=8,$ $a_2=6,$ $a_3=3,$	$b_1=2,$ $b_2=3,$ $b_3=2,$	$t_1=840,$ $t_2=870,$ $t_3=560,$	$\alpha=6,$ $\beta=2.$
Вариант 22	$a_1=7,$ $a_2=6,$ $a_3=5,$	$b_1=8,$ $b_2=3,$ $b_3=1,$	$t_1=476,$ $t_2=364,$ $t_3=319,$	$\alpha=11$ $\beta=10.$
Вариант 23	$a_1=10$ $a_2=9,$ $a_3=3,$	$b_1=18,$ $b_2=15,$ $b_3=1,$	$t_1=1238,$ $t_2=1118,$ $t_3=523,$	$\alpha=11,$ $\beta=13.$
Вариант 24	$a_1=3,$ $a_2=3,$ $a_3=2,$	$b_1=2,$ $b_2=3,$ $b_3=5,$	$t_1=273,$ $t_2=300,$ $t_3=380,$	$\alpha=4.$ $\beta=5.$
Вариант 25	$a_1=2,$ $a_2=3,$ $a_3=3,$	$b_1=1,$ $b_2=6,$ $b_3=7,$	$t_1=438,$ $t_2=747,$ $t_3=812,$	$\alpha=7.$ $\beta=5.$
Вариант 26	$a_1=4,$ $a_2=3,$ $a_3=2,$	$b_1=3,$ $b_2=4,$ $b_3=6,$	$t_1=480,$ $t_2=444,$ $t_3=546,$	$\alpha=2,$ $\beta=4.$
Вариант 27	$a_1=4,$ $a_2=3,$ $a_3=3,$	$b_1=3,$ $b_2=4,$ $b_3=5,$	$t_1=440,$ $t_2=393,$ $t_3=450,$	$\alpha=6,$ $\beta=5.$
Вариант 28	$a_1=2,$ $a_2=3,$ $a_3=2,$	$b_1=3,$ $b_2=6,$ $b_3=8,$	$t_1=428,$ $t_2=672,$ $t_3=672,$	$\alpha=3,$ $\beta=8.$
Вариант 29	$a_1=8$ $a_2=7,$ $a_3=7,$	$b_1=12,$ $b_2=9,$ $b_3=5,$	$t_1=612,$ $t_2=492,$ $t_3=562,$	$\alpha=11,$ $\beta=9.$

Вариант 30	$a_1=8,$	$b_1=10,$	$t_1=459,$	$\alpha=9,$
	$a_2=7,$	$b_2=5,$	$t_2=379,$	$\beta=9.$
	$a_3=7,$	$b_3=2,$	$t_3=459,$	

2.2 Транспортная задача

Поставщики товара – оптовые коммерческие предприятия A_1, A_2, A_3 имеют товаров соответственно в количестве a_1, a_2, a_3 .

Розничные торговые предприятия B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 – подали заявку на закупку товаров в объёмах соответственно: b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 .

Тарифы перевозок единицы груза с каждого из пунктов поставки в соответствующие пункты потребления заданы в виде матрицы D и указаны в таблице (матрица тарифов):

Мощности поставщиков	Мощности потребителей				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}
A_2	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	d_{25}
A_3	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	d_{35}

Найдите такой план перевозки груза от поставщиков к потребителям, чтобы совокупные затраты на перевозку были минимальными.

Варианты:

1.

$$a_1 = 300, a_2 = 280, a_3 = 220;$$

$$b_1 = 180, b_2 = 140, b_3 = 190, b_4 = 120,$$

$$b_5 = 170.$$

$$D = \begin{pmatrix} 12 & 21 & 9 & 10 & 16 \\ 13 & 15 & 11 & 13 & 21 \\ 19 & 26 & 12 & 17 & 20 \end{pmatrix};$$

2.

$$a_1 = 200, a_2 = 150, a_3 = 150;$$

$$b_1 = 90, b_2 = 100, b_3 = 70, b_4 = 130,$$

$$b_5 = 110.$$

$$D = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 21 & 14 & 17 \\ 14 & 8 & 15 & 11 & 21 \\ 19 & 16 & 26 & 12 & 20 \end{pmatrix};$$

3.

$$a_1 = 250, a_2 = 200, a_3 = 150;$$

$$b_1 = 180, b_2 = 120, b_3 = 90, b_4 = 105,$$

$$b_5 = 105.$$

$$D = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 21 & 10 & 15 \\ 13 & 4 & 15 & 13 & 21 \\ 19 & 16 & 26 & 17 & 20 \end{pmatrix};$$

4.

$$a_1 = 400, a_2 = 250, a_3 = 350;$$

$$b_1 = 200, b_2 = 170, b_3 = 230, b_4 = 225,$$

$$b_5 = 175.$$

$$D = \begin{pmatrix} 13 & 9 & 5 & 11 & 17 \\ 14 & 5 & 12 & 14 & 22 \\ 20 & 17 & 13 & 18 & 21 \end{pmatrix};$$

5.

$$a_1 = 150, a_2 = 200, a_3 = 150;$$

$$b_1 = 160, b_2 = 70, b_3 = 90, b_4 = 80,$$

$$b_5 = 100.$$

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 20 & 7 & 11 & 16 \\ 4 & 14 & 12 & 15 & 17 \\ 15 & 22 & 11 & 12 & 19 \end{pmatrix};$$

6.

$$a_1 = 280, a_2 = 300, a_3 = 220;$$

$$b_1 = 170, b_2 = 120, b_3 = 190, b_4 = 140,$$

$$b_5 = 180.$$

$$D = \begin{pmatrix} 28 & 12 & 7 & 18 & 7 \\ 35 & 14 & 12 & 15 & 3 \\ 30 & 16 & 11 & 25 & 15 \end{pmatrix};$$

7.

$$a_1 = 150, a_2 = 250, a_3 = 200;$$

$$b_1 = 180, b_2 = 120, b_3 = 90, b_4 = 105,$$

$$b_5 = 105.$$

$$D = \begin{pmatrix} 14 & 6 & 4 & 9 & 4 \\ 17 & 10 & 9 & 11 & 5 \\ 15 & 11 & 6 & 13 & 8 \end{pmatrix};$$

8.

$$a_1 = 250, a_2 = 400, a_3 = 350;$$

$$b_1 = 300, b_2 = 160, b_3 = 220, b_4 = 180,$$

$$b_5 = 140.$$

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 35 & 20 & 7 \\ 15 & 35 & 12 & 11 & 6 \\ 16 & 19 & 40 & 15 & 25 \end{pmatrix};$$

9.

$$a_1 = 150, a_2 = 150, a_3 = 200;$$

$$b_1 = 100, b_2 = 70, b_3 = 130, b_4 = 110,$$

$$b_5 = 90.$$

$$D = \begin{pmatrix} 20 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 14 & 10 & 12 & 20 & 46 \\ 25 & 11 & 16 & 19 & 48 \end{pmatrix};$$

10.

$$a_1 = 280, a_2 = 220, a_3 = 300;$$

$$b_1 = 190, b_2 = 140, b_3 = 180, b_4 = 120,$$

$$b_5 = 170.$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 3 & 10 & 12 & 20 & 46 \\ 15 & 11 & 16 & 19 & 48 \end{pmatrix};$$

11.

$$a_1 = 200, a_2 = 250, a_3 = 150;$$

$$b_1 = 120, b_2 = 180, b_3 = 105, b_4 = 90,$$

$$b_5 = 105.$$

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 17 & 11 & 8 \\ 13 & 4 & 9 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 14 & 10 & 6 \end{pmatrix};$$

12.

$$a_1 = 350, a_2 = 400, a_3 = 250;$$

$$b_1 = 175, b_2 = 225, b_3 = 230, b_4 = 170,$$

$$b_5 = 200.$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 13 & 18 & 17 & 8 \\ 6 & 10 & 15 & 6 & 3 \\ 24 & 21 & 9 & 16 & 17 \end{pmatrix};$$

13.

$$a_1 = 250, a_2 = 250, a_3 = 200;$$

$$b_1 = 120, b_2 = 110, b_3 = 85, b_4 = 195,$$

$$b_5 = 190.$$

$$D = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 16 & 4 & 11 \\ 20 & 9 & 6 & 10 & 9 \\ 2 & 4 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix};$$

14.

$$a_1 = 300, a_2 = 330, a_3 = 370;$$

$$b_1 = 190, b_2 = 150, b_3 = 240, b_4 = 200,$$

$$b_5 = 220.$$

$$D = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 16 & 8 & 11 \\ 21 & 10 & 8 & 15 & 23 \\ 19 & 10 & 4 & 9 & 17 \end{pmatrix};$$

15.

$$a_1 = 250, a_2 = 180, a_3 = 270;$$

$$b_1 = 160, b_2 = 120, b_3 = 100, b_4 = 150,$$

$$b_5 = 170.$$

$$D = \begin{pmatrix} 14 & 11 & 9 & 13 & 18 \\ 6 & 5 & 14 & 4 & 14 \\ 7 & 19 & 11 & 6 & 13 \end{pmatrix};$$

16.

$$a_1 = 350, a_2 = 300, a_3 = 350;$$

$$b_1 = 160, b_2 = 160, b_3 = 180, b_4 = 220,$$

$$b_5 = 280.$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 10 & 14 & 18 \\ 17 & 6 & 4 & 11 & 9 \\ 12 & 8 & 19 & 10 & 13 \end{pmatrix};$$

17.

$$a_1 = 250, a_2 = 350, a_3 = 300;$$

$$b_1 = 150, b_2 = 170, b_3 = 190, b_4 = 210,$$

$$b_5 = 180.$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 16 & 10 & 16 \\ 13 & 12 & 18 & 12 & 20 \\ 19 & 15 & 10 & 13 & 13 \end{pmatrix};$$

18.

$$a_1 = 220, a_2 = 400, a_3 = 280;$$

$$b_1 = 160, b_2 = 180, b_3 = 170, b_4 = 200,$$

$$b_5 = 190.$$

$$D = \begin{pmatrix} 20 & 17 & 13 & 2 & 17 \\ 6 & 10 & 9 & 4 & 15 \\ 3 & 7 & 13 & 6 & 23 \end{pmatrix};$$

19.

$$a_1 = 160, a_2 = 400, a_3 = 240;$$

$$b_1 = 170, b_2 = 190, b_3 = 140, b_4 = 180,$$

$$b_5 = 120.$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 13 & 14 & 18 & 14 \\ 25 & 14 & 7 & 5 & 16 \\ 11 & 4 & 10 & 18 & 9 \end{pmatrix};$$

20.

$$a_1 = 280, a_2 = 340, a_3 = 280;$$

$$b_1 = 170, b_2 = 160, b_3 = 190, b_4 = 200,$$

$$b_5 = 180.$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 & 14 & 9 \\ 15 & 11 & 6 & 17 & 11 \\ 13 & 18 & 10 & 12 & 22 \end{pmatrix};$$

21.

$$a_1 = 200, a_2 = 175, a_3 = 225;$$

$$b_1 = 100, b_2 = 130, b_3 = 80, b_4 = 190,$$

$$b_5 = 100.$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix};$$

22.

$$a_1 = 200, a_2 = 450, a_3 = 250;$$

$$b_1 = 100, b_2 = 125, b_3 = 325, b_4 = 250,$$

$$b_5 = 100.$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 10 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 5 & 9 & 2 \end{pmatrix};$$

23.

$$a_1 = 250, a_2 = 200, a_3 = 200;$$

$$b_1 = 120, b_2 = 130, b_3 = 100, b_4 = 160,$$

$$b_5 = 140.$$

$$D = \begin{pmatrix} 27 & 36 & 35 & 31 & 39 \\ 22 & 23 & 23 & 32 & 35 \\ 35 & 42 & 38 & 32 & 39 \end{pmatrix};$$

24.

$$a_1 = 350, a_2 = 330, a_3 = 270;$$

$$b_1 = 210, b_2 = 170, b_3 = 220, b_4 = 150,$$

$$b_5 = 200.$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 9 & 1 & 7 \\ 7 & 14 & 2 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 11 & 2 & 10 \end{pmatrix};$$

25.

$$a_1 = 300, a_2 = 250, a_3 = 200;$$

$$b_1 = 210, b_2 = 150, b_3 = 120, b_4 = 135,$$

$$b_5 = 135.$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 16 & 10 & 1 & 4 \\ 9 & 4 & 11 & 9 & 17 \\ 4 & 8 & 13 & 2 & 7 \end{pmatrix};$$

26.

$$a_1 = 350, a_2 = 200, a_3 = 200;$$

$$b_1 = 170, b_2 = 140, b_3 = 200, b_4 = 195,$$

$$b_5 = 145.$$

$$D = \begin{pmatrix} 22 & 14 & 16 & 28 & 30 \\ 37 & 30 & 31 & 39 & 41 \\ 19 & 17 & 26 & 36 & 36 \end{pmatrix};$$

27.

$$a_1 = 200, a_2 = 250, a_3 = 200;$$

$$b_1 = 190, b_2 = 100, b_3 = 120, b_4 = 110,$$

$$b_5 = 130.$$

$$D = \begin{pmatrix} 28 & 27 & 18 & 27 & 24 \\ 27 & 33 & 23 & 31 & 34 \\ 18 & 26 & 27 & 32 & 21 \end{pmatrix};$$

28.

$$a_1 = 230, a_2 = 250, a_3 = 170;$$

$$b_1 = 140, b_2 = 90, b_3 = 160, b_4 = 110,$$

$$b_5 = 150.$$

$$D = \begin{pmatrix} 40 & 19 & 25 & 25 & 35 \\ 46 & 27 & 36 & 40 & 45 \\ 49 & 26 & 27 & 18 & 38 \end{pmatrix};$$

29.

$$a_1 = 200, a_2 = 300, a_3 = 250;$$

$$b_1 = 210, b_2 = 150, b_3 = 120, b_4 = 135,$$

$$b_5 = 135.$$

$$D = \begin{pmatrix} 26 & 17 & 19 & 21 & 23 \\ 27 & 19 & 20 & 16 & 22 \\ 20 & 10 & 13 & 13 & 18 \end{pmatrix};$$

30.

$$a_1 = 200, a_2 = 350, a_3 = 300;$$

$$b_1 = 270, b_2 = 130, b_3 = 190, b_4 = 150,$$

$$b_5 = 110.$$

$$D = \begin{pmatrix} 24 & 50 & 55 & 27 & 16 \\ 35 & 59 & 55 & 27 & 41 \\ 50 & 47 & 23 & 17 & 21 \end{pmatrix};$$

2.3 Задача о назначениях

Задача 2.3.1. Формирование оптимального штата компании

В распоряжении некоторой компании имеется 5 видов должностей: продавцов, кассиров, менеджеров, бухгалтеров, коммерсантов, и 5 кандидатов для их выполнения. Претенденты проходили тестирование на профессиональную пригодность. Из прошлого опыта известно, что эффективность работы кандидатов в различных видах работах неодинакова. Коммерческий директор компании произвёл оценку деятельности каждого кандидата в каждом виде работ.

Результаты этой оценки представлены в таблице, которая заполняется числовыми значениями из табл. 2.3.1, для номеров строк и столбцов матрицы эффективности работы кандидатов по видам работ из табл. 2.3.3 вашего варианта:

Кандидатов	Эффективность работы кандидатов по видам работ				
	I	II	III	IV	V
1					
2					
3					
4					
5					

Как коммерческий директор должен осуществить назначение кандидатов по разным видам работ, чтобы достичь максимальной эффективности работы компании?

Матрица эффективности работы кандидатов по видам работ:

Таблица 2.3.1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	68	72	75	83	75	69	40	45	25
2	56	60	58	63	61	59	37	56	24
3	35	38	40	45	25	27	64	53	42
4	40	42	47	45	53	36	56	42	67
5	62	70	68	67	69	70	56	48	64
6	65	63	69	70	72	68	45	56	53
7	68	47	52	64	75	68	73	57	64
8	67	58	45	79	86	47	51	65	47
9	54	65	83	73	64	68	70	72	51

Таблица 2.3.2

Вариант	Номера строк матрицы	Номера столбцов матрицы
1	(1 – 5)	(1 – 5)
2	(1 – 5)	(2 – 6)
3	(1 – 5)	(3 – 7)
4	(1 – 5)	(4 – 8)
5	(1 – 5)	(5 – 9)
6	(1 – 5)	(1 – 5)
7	(2 – 6)	(2 – 6)
8	(2 – 6)	(3 – 7)
9	(2 – 6)	(4 – 8)
10	(2 – 6)	(5 – 9)
11	(2 – 6)	(1 – 5)
12	(2 – 6)	(2 – 6)
13	(3 – 7)	(3 – 7)
14	(3 – 7)	(4 – 8)
15	(3 – 7)	(5 – 9)

Вариант	Номера строк матрицы	Номера столбцов матрицы
16	(3 – 7)	(1 – 5)
17	(3 – 7)	(2 – 6)
18	(3 – 7)	(3 – 7)
19	(4 – 8)	(4 – 8)
20	(4 – 8)	(5 – 9)
21	(4 – 8)	(1 – 5)
22	(4 – 8)	(2 – 6)
23	(4 – 8)	(3 – 7)
24	(4 – 8)	(4 – 8)
25	(5 – 9)	(5 – 9)
26	(5 – 9)	(1 – 5)
27	(5 – 9)	(2 – 6)
28	(5 – 9)	(3 – 7)
29	(5 – 9)	(4 – 8)
30	(5 – 9)	(5 – 9)

2.3.2 Применение задачи о назначениях к решению экономических проблем

Задача 1. Оптимальное исследование рынка

Группе, исследующей рынок товаров, требуется получить данные из 3 городов. В её распоряжении имеется 3 дня, и она предполагает провести по одному дню в каждом месте, проведя 20 опросов в первом городе, 15 опросов – во втором и 10 – в третьем. Вероятность успешного опроса в каждом месте задаётся матрицей P . Элемент матрицы p_{ij} характеризует вероятность успешного опроса в течение i -го дня в j -м месте, $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, n}$.

Определить время проведения опросов, при котором общее число опросов максимально. Матрица P вероятности успешного опроса в каждом месте дана по вариантам .

Пояснение к решению.

Обозначим через a_j – число опросов. Для данной задачи $a_j=(20, 15,10)$.

Введём величину $r_{ij}=p_{ij}a_j$, показывающую число успешных опросов в j -м месте в течение i -го дня.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-й день опрос проводится в } j\text{-м месте;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$R = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} x_{ij} \rightarrow \max .$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = \overline{1, n}; \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = \overline{1, n}; \\ x_{ij} \in \{0;1\}, i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Функция R характеризует суммарное число опросов. Его нужно максимизировать. Первое и второе ограничения соответствуют тому, что в течение одного дня можно находиться только в одном месте.

Решение задачи в Excel производится с помощью надстройки Поиск решения. Для этого введите в Excel данные матрицы R , установите ограничения в окне Поиск решения, в окне Параметра поиска решения установите флажок Линейная модель. Затем выберите клавишу Выполнить.

Варианты:

1. $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 6 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$	2. $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$	3. $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 7 \end{bmatrix}$	4. $\begin{bmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$	6. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 9 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$	7. $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \\ 7 & 9 & 2 \end{bmatrix}$	8. $\begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 9 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$	10. $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$	11. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$	12. $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 6 \\ 9 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 1 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$	14. $\begin{bmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 8 & 9 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$	15. $\begin{bmatrix} 8 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$	16. $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}$
17. $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$	18. $\begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 5 & 3 & 2 \\ 9 & 4 & 6 \end{bmatrix}$	19. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 6 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 3 \end{bmatrix}$	20. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$
21. $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$	22. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 6 \end{bmatrix}$	23. $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 8 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	24. $\begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$
25. $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 9 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	26. $\begin{bmatrix} 7 & 9 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$	27. $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix}$	28. $\begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 9 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Задача 2. Оптимальное использование торговых агентов

Торговая фирма продаёт товары в 4-х различных городах, покупательная способность жителей которых оценивается в b_j усл. ед., $j = \overline{1, n}$, т. е. $B_j = [b_1, b_2, b_3, b_4]$. Для реализации товаров компания располагает 4 торговыми агентами, каждого из которых она направляет в один из городов. Профессиональный уровень агентов различен; доля реализуемых i -м торговым агентом покупательных способностей составляет a_i , $i = \overline{1, n}$, т. е. $A_i = [a_1, a_2, a_3, a_4]$.

Как следует распределить торговых агентов по городам, чтобы компания получила максимальную выручку от продажи товаров?

Матрицы покупательных способностей даны по вариантам.

Пояснение к решению.

Введём параметр $c_{ij} = b_j a_i$, характеризующий величину покупательных способностей, реализуемых i -м торговым агентом в j -м городе.

Управляющие переменные x_{ij} , $i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}$ определяются по формуле

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й агент направлен в } j\text{-й город;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Математическая модель запишется в следующей форме:

$$C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max.$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = \overline{1, n}; \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = \overline{1, n}; \\ x_{ij} \in \{0; 1\}, i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Первое и второе ограничения формализуют, соответственно, условия о том, что в каждый город направляется один торговый агент, и один торговый агент не может работать в двух городах.

Целевая функция C – это сумма реализованных покупательных способностей всеми торговыми агентами во всех городах. Она должна быть максимальна.

Варианты:

1. $B_j = [12, 7, 6, 9]$ $A_i = [10, 6, 9, 8]$	2. $B_j = [7, 10, 8, 9]$ $A_i = [9, 8, 10, 6]$	3. $B_j = [9, 8, 10, 6]$ $A_i = [6, 5, 9, 10]$
4. $B_j = [13, 4, 10, 8]$ $A_i = [7, 10, 8, 8]$	5. $B_j = [9, 8, 10, 11]$ $A_i = [10, 9, 6, 7]$	6. $B_j = [11, 7, 5, 10]$ $A_i = [10, 8, 6, 9]$
7. $B_j = [12, 6, 9, 8]$ $A_i = [9, 6, 7, 10]$	8. $B_j = [12, 7, 10, 8]$ $A_i = [9, 11, 6, 9]$	9. $B_j = [9, 8, 10, 6]$ $A_i = [7, 10, 9, 11]$
10. $B_j = [11, 7, 6, 9]$ $A_i = [8, 9, 10, 7]$	11. $B_j = [10, 9, 8, 7]$ $A_i = [6, 9, 10, 8]$	12. $B_j = [112, 9, 10, 8]$ $A_i = [10, 7, 9, 6]$

13. $B_j = [11, 8, 9, 7]$ $A_i = [9, 6, 8, 5]$	14. $B_j = [10, 7, 8, 10]$ $A_i = [6, 10, 8, 9]$	15. $B_j = [10, 11, 9, 6]$ $A_i = [6, 10, 11, 5]$
16. $B_j = [7, 9, 10, 12]$ $A_i = [10, 9, 10, 8]$	17. $B_j = [12, 7, 6, 9]$ $A_i = [9, 7, 8, 10]$	18. $B_j = [9, 10, 8, 9]$ $A_i = [10, 9, 7, 11]$
19. $B_j = [10, 7, 5, 9]$ $A_i = [9, 8, 10, 10]$	20. $B_j = [13, 10, 9, 7]$ $A_i = [10, 6, 4, 8]$	21. $B_j = [5, 12, 9, 7]$ $A_i = [10, 4, 9, 8]$
22. $B_j = [10, 11, 7, 9]$ $A_i = [9, 10, 8, 6]$	23. $B_j = [9, 8, 9, 10]$ $A_i = [9, 7, 10, 6]$	24. $B_j = [9, 10, 6, 12]$ $A_i = [8, 9, 7, 11]$
25. $B_j = [8, 9, 7, 7]$ $A_i = [9, 9, 10, 7]$	26. $B_j = [10, 8, 7, 6]$ $A_i = [4, 10, 9, 7]$	27. $B_j = [10, 11, 10, 10]$ $A_i = [9, 10, 7, 6]$
28. $B_j = [9, 6, 4, 8]$ $A_i = [7, 5, 8, 12]$	29. $B_j = [10, 7, 9, 12]$ $A_i = [9, 4, 6, 8]$	30. $B_j = [8, 10, 11, 9]$ $A_i = [5, 8, 10, 7]$

2.4 Задачи дискретной оптимизации

Задача 1. Предлагается n инвестиционных проектов, тщательная экономическая экспертиза которых позволяет получить для каждого из проектов достаточно убедительные экономические оценки ожидаемого эффекта от их реализации $c_1, c_2, \dots, c_n$ и необходимых капиталовложений $p_1, p_2, \dots, p_n$. Общий объем возможных инвестиций ограничен величиной B . Необходимо так распорядиться имеющимися финансовыми ресурсами, чтобы максимизировать суммарный эффект от инвестиций.

Числовые данные по вариантам представлены в таблице (в усл. ед. измер.):

Вариант	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	B	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
1	110	60	80	15	30	200	80	50	75	40	45
2	90	60	80	15	30	200	80	50	75	40	45
3	23	18	13	6	3	60	100	90	75	26	15

Вариант	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	B	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
4	85	70	80	35	30	190	80	50	75	40	45
5	60	70	80	35	30	190	55	40	75	40	45
6	115	65	85	20	35	205	85	55	80	45	50
7	95	65	85	20	35	205	85	55	80	45	50
8	28	23	18	11	8	65	105	95	80	31	20
9	90	75	85	40	35	195	85	55	80	45	50
10	65	75	85	40	35	195	60	45	80	45	50
11	100	50	70	5	25	190	70	40	65	30	35
12	80	50	70	5	20	190	70	40	65	30	35
13	13	8	3	4	7	50	90	80	65	6	5
14	75	60	70	25	20	180	70	40	65	30	35
15	50	60	70	25	20	180	45	30	65	30	35
16	120	70	90	25	35	210	90	60	85	50	55
17	100	70	90	25	35	210	90	60	85	50	55
18	33	28	23	16	13	70	110	100	85	36	25
19	95	80	90	45	40	200	90	60	85	50	55
20	70	80	90	45	40	200	65	50	85	50	55
21	105	55	75	10	25	195	75	45	70	35	40
22	85	55	75	10	25	195	75	45	70	35	40
23	18	13	8	1	2	55	95	85	70	21	10
24	80	65	75	30	25	185	75	45	70	35	40
25	55	65	75	30	25	185	50	35	70	35	40
26	125	75	95	30	45	215	95	65	90	65	60
27	105	75	95	30	45	215	95	65	90	55	60
28	38	33	28	21	18	75	115	105	90	41	30
29	90	85	95	50	45	205	95	65	90	55	60
30	75	85	95	50	45	205	70	55	90	55	60

Задача 2. Фирма рассматривает пакет инвестиционных проектов, предварительные результаты анализа которых приведены в таблице (см. таблицу своего варианта).

Инвестиционный бюджет фирмы ограничен и равен 50 000 ден.ед., проекты не поддаются дроблению.

Определите оптимальный инвестиционный портфель методом целочисленной линейной оптимизации.

Варианты 1-2

Проект	Затраты (I)	NPV	Проект	Затраты(I)	NPV
A	28000	1000	A	18000	11000
B	14000	3000	B	14000	8000
C	18000	5500	C	11000	6000
D	10000	5000	D	10000	5000
E	6500	2000	E	9000	4000
F	7500	3500	F	7000	3000
G	7000	3000	G	6000	3500
H	8500	6000	H	5000	4000

Варианты 3-4

Проект	Затраты (I)	NPV	Проект	Затраты (I)	NPV
A	33000	22000	A	9000	6000
B	24000	16000	B	7000	4000
C	18000	12000	C	5500	1150
D	15000	10000	D	5000	4500
E	12000	8000	E	4500	3150
F	11250	7500	F	3500	2100
G	10000	6750	G	3000	1050
H	9500	5000	H	2500	900

Варианты 5-6

Проект	Затраты (I)	NPV	Проект	Затраты (I)	NPV
A	45800	9200	A	33000	6000
B	38500	7300	B	19000	8000
C	25800	5500	C	23000	10500
D	12500	5800	D	15000	10000
E	10300	4500	E	11500	7000
F	8500	3100	F	12500	8500
G	4000	1000	G	12000	8000
H	3500	700	H	13500	11000

Варианты 7-8

Проект	Затраты (I)	NPV	Проект	Затраты (I)	NPV
A	23000	16000	C	16000	11000
B	19000	13000	D	15000	10000
			E	14000	9000

F	12000	8000	C	23000	17000
G	11000	8500	D	20000	15000
H	10000	9000	E	17000	13000
Проект	Затраты (I)	NPV	F	16250	12500
A	38000	27000	G	15000	11750
B	29000	21000	H	14500	10000

Варианты 9-10

Проект	Затраты (I)	NPV	Проект	Затраты (I)	NPV
A	14000	11000	A	50800	14200
B	12000	9000	B	43500	12300
C	10500	6150	C	30800	10500
D	10000	9500	D	17500	10800
E	9500	8150	E	15300	9500
F	8500	7100	F	13500	8100
G	8000	6050	G	9000	6000
H	7500	5900	H	8500	5700

Варианты 11-12

Проект	Затраты (I)	NPV	Проект	Затраты (I)	NPV
A	29000	2000	A	19000	12000
B	15000	4000	B	15000	9000
C	19000	6500	C	12000	7000
D	11000	6000	D	11000	6000
E	7500	3000	E	10000	5000
F	8500	4500	F	8000	4000
G	8000	4000	G	7000	4500
H	9500	7000	H	6000	5000

Варианты 13-14

Проект	Затраты (I)	NPV	Проект	Затраты (I)	NPV
A	41000	30000	A	28000	1000
B	32000	24000	B	14000	3000
C	26000	20000	C	18000	5500
D	23000	18000	D	10000	5000
E	20000	16000	E	9000	4000
F	19250	15500	F	7000	3000
G	18000	14750	G	6000	3500
H	17500	13000	H	5000	4000

Варианты 15-16

Проект	Затраты (I)	NPV	Проект	Затраты (I)	NPV
A	18000	11000	D	10000	5000
B	14000	8000	E	6500	2000
C	11000	6000	F	7500	3500
			G	7000	3000

Н	8500	6000	D	5000	4500
Проект	Затраты (I)	NPV	E	12000	8000
A	9000	6000	F	11250	7500
B	7000	4000	G	10000	6750
C	5500	1150	H	9500	5000

Варианты 17-18

Проект	Затраты (I)	NPV	Проект	Затраты (I)	NPV
A	33000	22000	A	45800	9200
B	24000	16000	B	38500	7300
C	18000	12000	C	25800	5500
D	15000	10000	D	12500	5800
E	4500	3150	E	11500	7000
F	3500	2100	F	12500	8500
G	3000	1050	G	12000	8000
H	2500	900	H	13500	11000

Варианты 19-20

Проект	Затраты (I)	NPV	Проект	Затраты (I)	NPV
A	33000	6000	A	38000	27000
B	19000	8000	B	29000	21000
C	23000	10500	C	23000	17000
D	15000	10000	D	20000	15000
E	10300	4500	E	14000	9000
F	8500	3100	F	12000	8000
G	4000	1000	G	11000	8500
H	3500	700	H	10000	9000

Варианты 21-22

Проект	Затраты (I)	NPV	Проект	Затраты (I)	NPV
A	23000	16000	A	14000	11000
B	19000	13000	B	12000	9000
C	16000	11000	C	10500	6150
D	15000	10000	D	10000	9500
E	17000	13000	E	15300	9500
F	16250	12500	F	13500	8100
G	15000	11750	G	9000	6000
H	14500	10000	H	8500	5700

Варианты 23-24

Проект	Затраты (I)	NPV	Проект	Затраты (I)	NPV
A	50800	14200	F	8500	7100
B	43500	12300	G	8000	6050
C	30800	10500	H	7500	5900
D	17500	10800	Проект	Затраты (I)	NPV
E	9500	8150	A	19000	12000
			B	15000	9000

C	12000	7000	F	8500	4500
D	11000	6000	G	8000	4000
E	7500	3000	H	9500	7000

Варианты 25-26

Проект	Затраты (I)	NPV	Проект	Затраты (I)	NPV
A	29000	2000	A	41000	1000
B	15000	4000	B	32000	3000
C	19000	6500	C	26000	5500
D	11000	6000	D	23000	5000
E	10000	5000	E	20000	4000
F	8000	4000	F	19250	3000
G	7000	4500	G	18000	3500
H	6000	5000	H	17500	4000

Варианты 27-28

Проект	Затраты (I)	NPV	Проект	Затраты (I)	NPV
A	28000	30000	A	9000	11000
B	14000	24000	B	7000	8000
C	18000	20000	C	5500	6000
D	10000	18000	D	5000	5000
E	9000	16000	E	12000	2000
F	7000	15500	F	11250	3500
G	6000	14750	G	10000	3000
H	5000	13000	H	9500	6000

Варианты 29-30

Проект	Затраты (I)	NPV	Проект	Затраты (I)	NPV
A	18000	6000	A	45800	22000
B	14000	4000	B	38500	16000
C	11000	1150	C	25800	12000
D	10000	4500	D	12500	10000
E	6500	8000	E	11500	3150
F	7500	7500	F	12500	2100
G	7000	6750	G	12000	1050
H	8500	5000	H	13500	900

2.5 Задачи нелинейной оптимизации

Задача 1. Необходимо сформировать оптимальный портфель Марковица (минимального риска), трёх ценных бумаг A , B , C с эффективностями и рисками соответственно: (m_1, σ_1) , (m_2, σ_2) , (m_3, σ_3) . Нижняя граница доходности портфеля задана равной m_p .

Варианты	(m_j, σ_j)			m_p
	A	B	C	
1	(6, 20)	(20, 30)	(30, 60)	10
2	(2, 10)	(10, 50)	(50, 90)	20
3	(8, 20)	(20, 40)	(40, 60)	10
4	(4, 20)	(20, 50)	(50, 80)	10
5	(6, 30)	(30, 60)	(60, 90)	20
6	(8, 10)	(10, 60)	(60, 80)	15
7	(6, 30)	(30, 50)	(50, 80)	20
8	(4, 40)	(40, 80)	(80, 100)	30
9	(5, 10)	(10, 30)	(30, 50)	15
10	(4, 20)	(20, 40)	(40, 80)	20
11	(3, 10)	(10, 30)	(30, 70)	10
12	(2, 10)	(10, 40)	(40, 60)	20
13	(6, 30)	(30, 50)	(50, 80)	15
14	(8, 20)	(20, 60)	(60, 110)	30
15	(5, 10)	(10, 40)	(40, 80)	20
16	(2, 10)	(10, 30)	(30, 70)	10
17	(2, 10)	(10, 30)	(40, 60)	10
18	(4, 20)	(20, 50)	(50, 80)	15
19	(2, 10)	(10, 40)	(40, 60)	20
20	(6, 20)	(20, 60)	(60, 90)	15
21	(2, 10)	(10, 50)	(50, 70)	10
22	(4, 30)	(30, 50)	(50, 80)	15
23	(6, 20)	(20, 60)	(60, 80)	20
24	(5, 10)	(10, 50)	(50, 80)	10
25	(3, 10)	(10, 40)	(40, 60)	10
26	(7, 10)	(10, 30)	(30, 70)	20
27	(8, 20)	(20, 50)	(50, 80)	15
28	(6, 10)	(10, 30)	(30, 60)	10
29	(3, 20)	(20, 50)	(50, 90)	20
30	(4, 10)	(10, 40)	(40, 60)	10

Задача 2

(Для вариантов 1-15) Найти оптимальный портфель максимальной эффективности для трёх ценных бумаг ЦБ 1, ЦБ 2 и ЦБ 3 с доходностью m_i и риском σ_i , коэффициентами корреляции r_{ij} (см. таблицы своего варианта).

(Для вариантов 16-30) Сформировать портфель минимального риска из трёх видов ценных бумаг – ЦБ 1, ЦБ 2 и ЦБ 3 эффективностями m_i и рисками σ_i . Коэффициенты корреляции r_{ij} приведены в таблице (см. таблицы своего варианта).

Вариант 1

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
m_i %	14	7	10
σ_i	21	12	14

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.51	0.56
ЦБ 2	0.51	1	0.45
ЦБ 3	0.56	0.45	1

Верхняя граница риска задана равной 14

Вариант 2

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
m_i %	13	11	7
σ_i	20	20	10

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.14	0.2
ЦБ 2	0.14	1	0.53
ЦБ 3	0.2	0.53	1

Верхняя граница риска задана равной 13

Вариант 3

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
m_i %	15	13	17
σ_i	16	21	13

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.25	0.65
ЦБ 2	0.25	1	0.23
ЦБ 3	0.65	0.23	1

Верхняя граница риска задана равной 8

Вариант 4

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
m_i %	21	16	17
σ_i	22	7	11

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.24	0.35
ЦБ 2	0.24	1	0.58
ЦБ 3	0.35	0.58	1

Верхняя граница риска задана равной 14

Вариант 5

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
m_i %	9	11	8
σ_i	10	15	9

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.07	0.59
ЦБ 2	0.07	1	0.32
ЦБ 3	0.59	0.32	1

Верхняя граница риска задана равной 8

Вариант 6

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
$m_i \%$	5	7	11
σ_i	25	10	20

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.17	0.21
ЦБ 2	0.17	1	0.65
ЦБ 3	0.21	0.65	1

Верхняя граница риска задана равной 10

Вариант 7

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
$m_i \%$	13	16	9
σ_i	15	25	10

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.46	0.61
ЦБ 2	0.46	1	0.11
ЦБ 3	0.61	0.11	1

Верхняя граница риска задана равной 11

Вариант 8

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
$m_i \%$	19	17	11
σ_i	24	22	20

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.78	0.36
ЦБ 2	0.78	1	0.22
ЦБ 3	0.36	0.22	1

Верхняя граница риска задана равной 19

Вариант 9

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
$m_i \%$	13	15	10
σ_i	17	16	15

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.67	0.18
ЦБ 2	0.67	1	0.49
ЦБ 3	0.18	0.49	1

Верхняя граница риска задана равной 13

Вариант 10

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
$m_i \%$	8	7	11
σ_i	16	12	19

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.29	0.25
ЦБ 2	0.29	1	0.34
ЦБ 3	0.25	0.34	1

Верхняя граница риска задана равной 12

Вариант 11

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
$m_i \%$	45	34	12
σ_i	71	40	32

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.16	0.58
ЦБ 2	0.16	1	0.25
ЦБ 3	0.28	0.25	1

Верхняя граница риска задана равной 31

Вариант 12

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
$m_i \%$	16	12	15
σ_i	43	41	34

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.61	0.55
ЦБ 2	0.61	1	0.46
ЦБ 3	0.55	0.46	1

Верхняя граница риска задана равной 31,5

Вариант 13

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
$m_i \%$	26	21	14
σ_i	33	25	16

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.73	0.65
ЦБ 2	0.73	1	0.19
ЦБ 3	0.65	0.19	1

Верхняя граница риска задана равной 21

Вариант 14

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
$m_i \%$	21	17	11
σ_i	43	20	19

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.33	0.29
ЦБ 2	0.33	1	0.45
ЦБ 3	0.29	0.45	1

Верхняя граница риска задана равной 18

Вариант 15

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
$m_i \%$	18	16	7
σ_i	16	25	16

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.16	0.25
ЦБ 2	0.16	1	0.41
ЦБ 3	0.25	0.41	1

Верхняя граница риска задана равной 13

Вариант 16

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
$m_i \%$	15	16	17
σ_i	26	20	20

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.32	0.16
ЦБ 2	0.32	1	0.46
ЦБ 3	0.16	0.46	1

Доходность портфеля $m_p = \sum x_i m_i$ не менее 15

Вариант 17

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
$m_i \%$	6	5	11
σ_i	18	7	12

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.14	0.25
ЦБ 2	0.14	1	0.36
ЦБ 3	0.25	0.36	1

Доходность портфеля $m_p = \sum x_i m_i$ не менее 7

Вариант 18

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
$m_i \%$	4	6	9
σ_i	20	9	14

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.17	0.28
ЦБ 2	0.17	1	0.39
ЦБ 3	0.28	0.39	1

Доходность портфеля $m_p = \sum x_i m_i$ не менее 5

Вариант 19

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
$m_i \%$	8	7	11
σ_i	11	12	11

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.37	0.29
ЦБ 2	0.37	1	0.18
ЦБ 3	0.29	0.18	1

Доходность портфеля $m_p = \sum x_i m_i$ не менее 9

Вариант 20

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
$m_i \%$	7	13	5
σ_i	21	18	16

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.35	0.16
ЦБ 2	0.35	1	0.24
ЦБ 3	0.16	0.24	1

Доходность портфеля $m_p = \sum x_i m_i$ не менее 10

Вариант 21

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
$m_i \%$	14	16	19
σ_i	24	32	43

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.17	0.15
ЦБ 2	0.17	1	0.13
ЦБ 3	0.15	0.13	1

Доходность портфеля $m_p = \sum x_i m_i$ не менее 17

Вариант 22

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
$m_i \%$	5	10	7
σ_i	12	17	11

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.31	0.35
ЦБ 2	0.31	1	0.39
ЦБ 3	0.35	0.39	1

Доходность портфеля $m_p = \sum x_i m_i$ не менее 8

Вариант 23

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
$m_i \%$	9	12	8
σ_i	15	219	27

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.24	0.27
ЦБ 2	0.24	1	0.23
ЦБ 3	0.27	0.23	1

Доходность портфеля $m_p = \sum x_i m_i$ не менее 10

Вариант 24

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
m_i %	11	18	15
σ_i	20	11	20

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.14	0.24
ЦБ 2	0.14	1	0.34
ЦБ 3	0.24	0.34	1

Доходность портфеля $m_p = \sum x_i m_i$ не менее 17

Вариант 25

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
m_i %	41	32	8
σ_i	66	75	19

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.46	0.18
ЦБ 2	0.46	1	0.37
ЦБ 3	0.18	0.46	1

Доходность портфеля $m_p = \sum x_i m_i$ не менее 32

Вариант 26

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
m_i %	15	21	11
σ_i	35	58	31

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.22	0.38
ЦБ 2	0.22	1	0.16
ЦБ 3	0.38	0.16	1

Доходность портфеля $m_p = \sum x_i m_i$ не менее 16

Вариант 27

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
m_i %	19	22	17
σ_i	65	71	32

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
UAZA	1	0.33	0.17
ROST	0.33	1	0.28
GAZP	0.17	0.28	1

Доходность портфеля $m_p = \sum x_i m_i$ не менее 18

Вариант 28

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
m_i %	18	27	11
σ_i	34	83	29

	ЦБ 1	ЦБ 2	ЦБ 3
ЦБ 1	1	0.65	0.13
ЦБ 2	0.65	1	0.39
ЦБ 3	0.13	0.39	1

Доходность портфеля $m_p = \sum x_i m_i$ не менее 18

2.6 Динамическое моделирование (принцип оптимальности)

Задача. Акционерное общество инвестирует в новый проект XXX млн руб. Для каждого года известна внутренняя норма доходности (ВНД) – 15%, 18%, 25%, 20%. Полученный доход за каждый год реинвестируется в проект. Необходимо определить дивидендную политику по годам, в соответствии с которой (при условии исполнения обязательств перед акционерами) максимизировать общую прибыль. Обязательства перед акционерами состоят в том, что необходимо выплатить за четыре года X млн. руб. дивидендов, при этом существуют ограничения по максимальной сумме дивидендов в каждом году: Д1, Д2, Д3, Д4 млн руб. в первом, втором, третьем, и четвертом годах соответственно.

Вариант	Инвестиции, XXX, млн руб.	Общая сумма дивидендов за 4 года, X, млн руб.	Максимальная сумма дивидендов, (Д1, Д2, Д3, Д4), млн руб.			
			1 год	2 год	3 год	4 год
1	34 133	2 730	1 024	1 365	683	341
2	11 378	910	114	341	455	228
3	3 793	303	76	38	114	152
4	1 264	101	51	25	13	38
5	421	34	13	17	8	4
6	140	11	2	4	6	3
7	468	37	9	7	13	20
8	780	62	31	15	12	22
9	1 301	103	40	52	25	20
10	2 168	172	15	67	87	42
11	4 336	344	84	30	134	174
12	8 672	688	348	168	60	268
13	17 344	1 376	536	696	336	120
14	34 688	2 752	240	1 072	1 392	672
15	69 376	5 504	1 344	480	2 144	2 784
16	138 752	11 008	5 568	2 688	960	4 288
17	46 251	3 669	1 429	1 856	896	320
18	15 417	1 223	107	476	619	299
19	5 139	408	100	36	159	206
20	1713	136	69	33	12	53
21	3 426	272	106	138	66	24
22	6 852	544	48	212	276	132
23	13 704	1 088	264	96	424	552
24	27 408	2 176	1 104	528	192	848
25	54 816	4 352	1 696	2 208	1 056	384
26	109 632	8 704	768	3 392	4 416	2 112
27	36 544	2 901	704	256	1 131	1 472
28	12 181	967	491	235	85	377
29	4 060	322	126	164	78	28
30	1 353	107	9	42	55	26

2.7 Балансовый метод и оптимальное планирование

Задача. Используя балансовый метод планирования и модель Леонтьева, построить баланс производства и распределения продукции предприятий.

Промышленная группа предприятий (холдинг) выпускает продукцию трёх видов, при этом каждое из трёх предприятий группы специализируется на выпуске продукции одного вида: первое предприятие специализируется на выпуске продукции первого вида, второе предприятие – продукции второго вида; третье предприятие – продукции третьего вида. Часть выпускаемой продукции потребляется предприятиями холдинга (идёт на внутреннее потребление), остальная часть поставляется за его пределы (внешним потребителям, является конечным продуктом). Специалистами управляющей компании получены экономические оценки a_{ij} ($i=1,2,3; j=1,2,3$) элементов технологической матрицы A (норм расхода, коэффициентов прямых материальных затрат) и элементов y_i вектора конечной продукции Y .

Требуется: Проверить продуктивность технологической матрицы $A=(a_{ij})$ (матрицы коэффициентов прямых материальных затрат). Построить баланс (заполнить таблицу) производства и распределения продукции предприятий холдинга. В соответствии с номером Вашего варианта ниже в таблице 2.7.1 выберите числовые значения для таблицы 2.7.2

Задача. Даны коэффициенты прямых поставок a_{ij} и конечный продукт y_j . Требуется определить:

- коэффициенты полных затрат;
- вектор валового выпуска;
- межотраслевые поставки продукции;
- проверить продуктивность матрицы A ;
- заполнить схему межотраслевого баланса.

В соответствии с Вашим вариантом из таблицы 2.7.2 выберите числовые значения для таблицы 2.7.1

Таблица 2.7.1

Отрасли	Коэффициенты прямых поставок a_{ij}			Конечный продукт Y_i
	1	2	3	
1	1А	2А	3А	4А
2	1Б	2Б	3Б	4Б
3	1В	2В	3В	4В

Таблица 2.7.2

№ варианта	Для 1-й строки				Для 2-й строки				Для 3-й строки			
	1А	2А	3А	4А	1Б	2Б	3Б	4Б	1В	2В	3В	4В
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0,1	0,2	0,1	200	0,2	0,1	0	150	0	0,2	0,1	250
2	0,0	0,1	0,2	180	0,1	0,2	0,1	200	0,2	0,1	0,2	200
3	0,2	0,1	0,2	150	0	0,1	0,2	180	0,1	0	0,1	100
4	0,1	0	0,1	100	0,1	0	0,2	300	0,2	0,1	0	160
5	0,2	0,3	0	120	0,3	0,1	0,2	250	0,1	0	0,3	180
6	0,3	0,4	0,1	200	0,1	0,2	0,4	300	0,3	0,4	0,1	200
7	0,1	0,2	0,4	100	0	0,4	0,1	200	0,1	0,3	0,4	100
8	0,0	0,4	0,1	160	0,4	0,1	0	180	0,3	0	0,1	150
9	0,4	0,2	0,3	180	0,2	0,1	0	200	0,2	0,1	0	160
10	0,1	0,1	0,2	160	0,1	0,2	0,3	180	0,1	0,2	0,3	170
11	0,0	0,1	0,2	170	0	0,1	0,4	170	0,4	0,3	0,1	180
12	0,1	0	0,3	150	0,1	0	0,3	160	0,2	0,1	0	190
13	0,2	0,3	0	140	0,3	0,1	0	170	0,1	0,1	0,4	200
14	0,3	0,4	0,1	100	0,2	0,2	0,1	150	0,3	0,2	0,1	190
15	0,1	0,2	0,2	200	0,1	0,4	0,2	140	0,1	0	0,3	180
16	0,0	0,4	0,1	150	0,4	0,1	0,1	130	0,3	0	0,2	170
17	0,4	0,2	0,1	130	0,2	0,1	0,3	120	0,2	0,3	0,1	160
18	0,3	0,1	0	120	0,1	0,2	0,1	110	0,4	0	0,1	150
19	0,1	0,1	0,3	110	0	0,3	0,1	100	0,3	0,2	0,1	140
20	0,4	0	0,2	180	0,2	0,4	0	110	0,2	0,1	0	130
21	0,0	0,3	0,1	160	0,3	0,1	0,1	170	0	0,4	0,3	120
22	0,2	0,4	0	100	0,4	0	0,3	200	0,1	0,3	0,1	100
23	0,0	0,1	0,3	100	0,4	0,1	0	80	0,2	0,1	0,2	180
24	0,2	0	0,2	110	0,3	0,2	0,1	90	0,2	0	0,1	190
25	0,1	0,3	0,1	120	0,2	0,1	0,3	100	0,2	0,1	0,3	200
26	0,2	0,4	0	130	0,1	0,2	0	110	0,2	0,2	0,2	100
27	0,3	0,2	0,2	140	0,1	0,1	0,4	120	0,1	0,2	0	110
28	0,1	0,4	0,1	150	0,1	0,4	0,3	130	0,1	0,1	0,2	120
29	0,0	0,2	0,4	160	0,1	0,2	0,1	140	0,1	0,3	0	130
30	0,4	0,1	0,1	170	0,3	0,1	0,2	150	0,1	0,4	0,1	140

Литература

1. Абчук, В. А. Экономико-математические методы / В. А. Абчук. – СПб. : Союз, 2012. – 320 с.
2. Гаркас, В. А. Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах / В. А. Гаркас. – СПб. : ВHV, 2007. – 336 с.
3. Горбовцов, Г. Я. Методы оптимизации : учеб.-практическое пособие / Г. Я. Горбовцов. – М. : МЭСИ, 2010. – 120 с.
4. Горчаков, А. Л. Компьютерные экономико-математические модели / А. Л. Горчаков, Н. В. Орлова. – М. : ЮНИТИ, 2005. – 136 с.
5. Жданов, С. А. Экономические модели и методы в управлении / С. А. Жданов. – М. : ДиС, 2011. – 176 с.
6. Кремер, Н. Ш. Исследование операций в экономике / Н. Ш. Кремер. – М. : ЮНИТИ, 2009. – 407 с.
7. Лукасевич, И. Я. Анализ финансовых операций / И. Я. Лукасевич. – М. : Финансы, ЮНИТИ, 2009. – 400 с.
8. Орлова, И. В. Экономико-математические методы и модели. Выполнение расчетов в среде Excel / И. В. Орлова. – М. : Финстатинформ, 2010. – 136 с.
9. Томас, Р. Количественные методы анализа хозяйственной деятельности / Р. Томас. – М. : ДИС, 2009. – 432 с.
10. Шелобаев, С. Н. Математические методы и модели / С. Н. Шелобаев. – М. : ЮНИТИ, 2010. – 367 с.
11. Шипин, Е. В. Математические методы и модели в управлении / Е. В. Шипин, А. Г. Чхартиневилли. – М. : Дело, 2010. – 440 с.