Министерство образования Российской федерации

Новокузнецкий филиал - институт
Кемеровского государственного университета

Кафедра информационных систем и управления

МЕТОДЫ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Рекомендации к выполнению лабораторных и практических работ по дисциплине "Методы оптимизации"

Специальности: "Автоматизированные системы обработки информации и управления" (220200), "Информационные системы в экономике" (071900)

Издание второе, переработанное

Новокузнецк
2002

УДК 681.3.06
М - 54

Рецензент: доктор технических наук, профессор Каледин В.О.

М-54 Методы условной оптимизации: Рек. к выполнению лаб. и практ. работ / Сост.: С.А. Шипилов: НФИ КемГУ.- 2-е изд. перераб. – Новокузнецк. 2002.- 48 с.

Рассмотрены постановки задач, теоретические основы и практические аспекты применения методов решения задач линейного и нелинейного программирования. Описаны специальные виды задач линейного программирования: целочисленное программирование и транспортная задача. Работа алгоритмов иллюстрируется на конкретных примерах. Описана методика использования табличного процессора Excel для решения оптимизационных задач. Приведены варианты индивидуальных заданий для выполнения лабораторных и практических работ.

Предназначены для студентов специальностей "Автоматизированные системы обработки информации и управления"(220200), "Информационные системы в экономике"(071900).

Печатается по решению методического совета НФИ КемГУ.

УДК 681.3.06

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Линейным программированием (ЛП) называется раздел математики, в котором изучаются методы нахождения минимума или максимума линейной функции конечного числа переменных при условии, что переменные удовлетворяют конечному числу дополнительных условий (ограничений), имеющих вид линейных уравнений или линейных неравенств.

1.1. Основные понятия и определения. Постановка задачи ЛП

Задача ЛП в общем случае может быть сформулирована следующим образом. Найти такие значения действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которых линейная целевая функция $f(\mathbf{x})$ принимает минимальное (или максимальное) значение, т.е.

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \min(\max) \tag{1}$$

при условии, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i \,,\; i = \overline{1, m}\,, \tag{2}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \,,\; i = \overline{(m+1), p}\,, \tag{3}$$

Такая постановка называется задачей ЛП в ***произвольной форме записи***.

Задача, в которой требуется найти максимум линейной формы (1) при условиях (2) и условиях

$$x_j \ge 0,\; j = \overline{1, n}\,, \tag{4}$$

что в матричной форме представляется в виде:

$$\left.\begin{array}{c} f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x} \to \max \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ge 0 \end{array}\right\} \tag{5}$$

называется ***симметричной формой записи*** задачи ЛП (или стандартной задачей ЛП). Здесь $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$, $\mathrm{c}^{\mathrm{T}}=(c_1, c_1, \ldots, c_n)$, $\mathbf{A}$ –матрица (a_{ij}) размера m х n, $\mathbf{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}}$.

Совокупность чисел $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, удовлетворяющих ограничениям (2) - (4) задачи ЛП, называется ***допустимым решением*** (или ***планом***). Все допустимые решения образуют ***область допустимых решений*** (ОДР).

План $\mathbf{x}^*=(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^{\mathrm{T}}$, при котором целевая функция (1) принимает минимальное (максимальное) значение, называется ***оптимальным планом*** или ***решением задачи ЛП***.

Известна также ***каноническая форма записи*** задачи ЛП, которая будет подробно рассмотрена ниже.

Типичным примером задачи ЛП является задача распределения ресурсов, ограничения- равенства в которых соответствуют необходимости полного использования ресурсов (например, скоропортящихся). Коэффициенты a_{ij} обычно означают либо расход i- того ресурса на производство единицы j- той продукции (ресурсом может быть сырье, машинное время, электроэнергия и др.), либо содержание некоторого ингредиента в исходном ресурсе (железа в руде, золы в угле, белков в пищевом продукте и т.д.). Свободные члены b_i обычно означают запас ресурса или потребное количество ингредиента в производимой продукции. Дальнейшее изложение материала будем проводить на таком примере, выделяя его в тексте курсивом.

Пример

Задача распределения ресурсов

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 на предприятии используют два вида сырья S_1 и S_2. При этом, производство ограничено как запасами сырья, так и временем машинной обработки. Количество ежедневно получаемого сырья, единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемой от реализации единицы продукции, приведены в табл.1. *В ней также приводятся затраты машинного времени для изготовления каждого вида продукции и максимально возможное время эксплуатации машин за сутки.*

Таблица 1

Типы ресурсов	*Запас ресурсов*	*Вид продукции*	
		P_1	P_2
Сырье S_1	*40*	*8*	*5*
Сырье S_2	*30*	*5*	*6*
Машинное время	*20*	*2*	*5*
Прибыль от ед. продукции (в долларах)		*50*	*40*

Требуется составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить максимальную прибыль.

Решение. *Составим математическую модель. Обозначим через x_1 – количество единиц продукции P_1, а через x_2 – количество единиц продукции P_1, выпускаемых ежедневно. Прибыль от реализации этой продукции равна $50x_1+40x_2$ долларов и ее нужно максимизировать. Беспредельному увеличению количества продукции препятствуют ограничения. Ограничено количество сырья S_1 и S_2 откуда имеем ограничения*

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \end{cases}.$$

Ограничено машинное время. На изготовление единицы продукции P_1 уходит 2 часа, на P_2 – 5 часов, а всего машины могут работать до 20 часов в *сутки, поэтому* $2x_1 + 5x_2 \le 20$. *Кроме того, количество продукции неотрицательное число, поэтому* $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

В результате общая постановка задачи ЛП имеет вид:

$$f(\mathrm{x}) = 50x_1 + 40x_2 \to \max \quad ;$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ \quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} .$$

Последующие этапы решения задачи будем рассматривать далее по тексту.

1.2. Геометрическая интерпретация и графический метод решения задачи ЛП

Графический метод решения задачи ЛП основан на геометрической интерпретации задачи ЛП и применяется в основном при решении задач двумерного пространства и только некоторых задач трехмерного пространства, так как довольно трудно построить многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств. Задачу пространства размерности больше трех изобразить графически вообще невозможно.

Пусть задача ЛП задана в двумерном пространстве, т.е. ограничения содержат две переменные. Тогда каждое из неравенств (2) определяет полуплоскость с граничной прямой: $a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 = b_i$ $(i=1,2, \ldots, \mathrm{m})$, $x_1 = 0, x_2 = 0$.

Уравнение граничной прямой $a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 = b_i$ преобразуем в форму уравнения в отрезках $\dfrac{x_1}{b_i / a_{i2}} + \dfrac{x_2}{b_i / a_{i2}} = 1$. В знаменателе имеем отрезки, которые отсекает прямая на осях координат. Дальнейшее решение, рассмотренное на нашем примере, приведено на рис.1.

Пример

Для построения многоугольника решений преобразуем исходную систему

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ \quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} \quad \textit{к виду} \quad \begin{cases} \dfrac{x_1}{5} + \dfrac{x_2}{5} \le 1 \\ \dfrac{x_1}{6} + \dfrac{x_2}{5} \le 1 \\ \dfrac{x_1}{10} + \dfrac{x_2}{4} \le 1 \\ \quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} \quad \textit{и изобразим граничные прямые.}$$

Взяв какую-нибудь точку, например, начало координат - (0, 0)*, установим, какую полуплоскость определяет соответствующее неравенство (на* рис.1 *полуплоскости показаны стрелками). Многоугольником решений данной задачи является ограниченный пятиугольник* 0ABCD.

Линейная функция F = $f(\mathbf{x})$ *является уравнением прямой линии* $c_1x_1 + c_2x_2$ =const. *Построим график целевой функции при* $f(\mathbf{x})$=0. *Для построения прямой* $50x_1 + 40x_2 = 0$ *строим радиус-вектор* N = (50; 40) = 10 · (5; 4) *и через точку* 0 *проводим прямую, перпендикулярную ему*. *Построенную прямую* F=0 *перемещаем параллельно самой себе в направлении вектора* N.

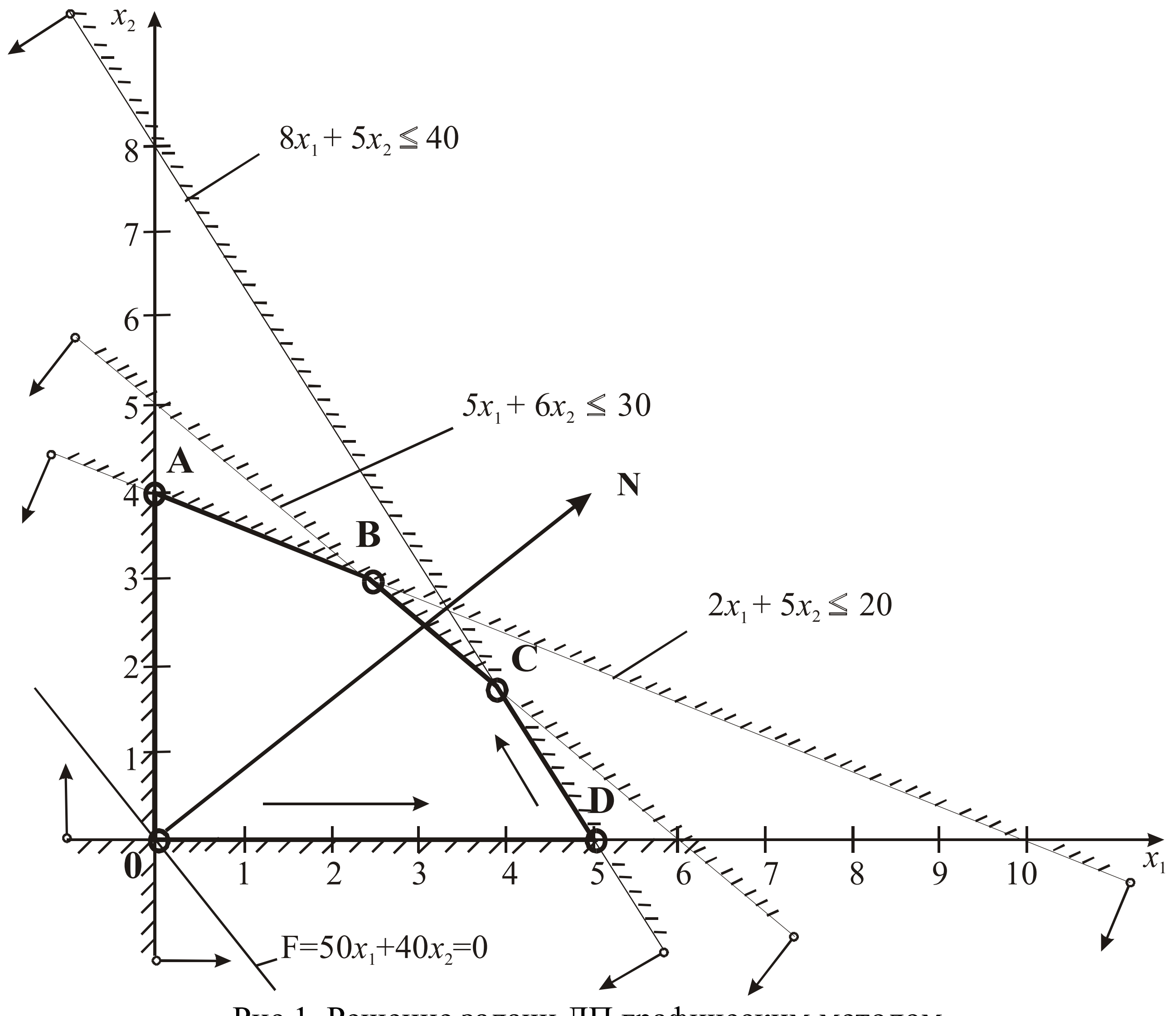

Рис.1. Решение задачи ЛП графическим методом

Поставленной задаче ЛП можно дать следующую интерпретацию. Найти точку многоугольника решений, в которой прямая $c_1x_1 + c_2x_2$ =const является опорной и функция F при этом достигает минимума или максимума. Легко показать, что оптимальным решением задачи ЛП являются координаты одной из вершин области допустимых решений (в нашем случае - многоугольника).

Из рис.1 следует, что опорной по отношению к построенному многоугольнику решений эта прямая становится в точке C, *где функция* F *принимает максимальное значение. Точка* C *лежит на пересечении двух прямых* $8x_1 + 5x_2 = 40$ *и* $5x_1 + 6x_2 = 30$.

Для определения ее координат решим систему уравнений $\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 40 \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \end{cases}$.

Оптимальный план задачи: $x_1 = 90/23 \approx 3{,}91$; $x_2 = 40/23 \approx 1{,}74$. *Подставляя значения* x_1 *и* x_2 *в целевую функцию, получаем* $F_{max} = 50 \cdot 3{,}91 + 40 \cdot 1{,}74 \approx 265{,}2$.

Таким образом, для того, чтобы получить максимальную прибыль в размере 265,2 *долларов, необходимо запланировать производство* 3,91 *ед. продукции* P_1 *и* 1,74 *ед. продукции* P_2.

1.3. Канонический вид задачи ЛП

Указанные выше в п. 1.1 три формы записи задачи ЛП эквивалентны в том смысле, что каждая из них с помощью несложных преобразований может быть переписана в другой форме. Это означает, что если имеется способ нахождения решения одной из указанных задач, то тем самым может быть определен оптимальный план любой из трех задач. Наиболее удобной для использования формальных методов решения является ***каноническая форма*** задачи ЛП.

Задача ЛП вида

$$f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min(\max)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots\ x_n \ge 0 \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\left.\begin{array}{c} f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x} \to \max \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ge 0 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

называется ***канонической формой*** записи задачи ЛП, если каждое i- тое уравнение содержит переменную x_k такую, что коэффициент перед ней в этом уравнении равен 1, а во всех других уравнениях равен 0. Если при этом $b_1 \ge 0$, $b_2 \ge 0$, $b_m \ge 0$, то говорят о ***допустимом каноническом решении***. Переменные x_k называются базисными, остальные – свободными. Иногда под канонической формой задачи ЛП понимают только систему (6) без каких-либо дополнительных условий.

Любую задачу ЛП можно привести к канонической форме (так же как и к любой другой). Для этого можно использовать следующие приемы.

1. Замена задачи на максимум задачей на минимум производится, как и в других задачах оптимизации, изменением знака $f(\mathbf{x})$, т.е. задача $f(\mathbf{x}) \to \max$ эквивалентна $-f(\mathbf{x}) \to \min$.

2. Неравенство $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i$ можно привести к равенству путем добавления к его левой части некоторой неотрицательной величины $x_{n+1} \ge 0$, в результате чего получаем линейное уравнение, содержащее n+1 неизвестных:

$$a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ \ldots + a_{in}\, x_n + x_{n+1} = b_i \ .$$

   Неотрицательная переменная величина $x_{n+1} \ge 0$, с помощью которой неравенство преобразуется в уравнение, называется ***дополнительной переменной***. Число вводимых дополнительных переменных при преобразовании ограничений – неравенств в ограничения – равенства равно числу преобразуемых неравенств.

3. Неравенство $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \ge b_i$ можно привести к форме (2), изменив знак левой и правой его частей, т.е. $\sum_{j=1}^{n} - a_{ij} \cdot x_j \le -b_i$.

4. Вместо переменной, на которую не наложены условия неотрицательности x_j , можно ввести две неотрицательные переменные $x_j' \ge 0$ и $x_j'' \ge 0$ следующим образом: $x_j = x_j' - x_j''$.

5. Условие в форме равенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i$ можно переписать в виде двух неравенств $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \ge b_i$ и $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i$.

Наиболее простым образом к канонической форме приводится задача в симметричной форме с ограничениями $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \le \mathbf{b}$. Эту систему ограничений можно представить в виде системы уравнений, в которую введем дополнительные неотрицательные переменные $x_{n+1} \ge 0$, $x_{n+2} \ge 0$, …, $x_{n+\mathrm{m}} \ge 0$:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases} . \qquad (7)$$

Вводимые дополнительные переменные имеют вполне определенный экономический смысл. Так, если в ограничениях исходной задачи ЛП отражается расход и наличие производственных ресурсов, то величины x_{n+i} равны объему неиспользованного ресурса.

Пример

Запишем в канонической и табличной форме задачу распределения ресурсов. Добавив к исходной системе ограничений $\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 20 \end{cases}$

неотрицательные переменные $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$ и $x_5 \ge 0$, *имеем*

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 + x_3 = 40 \\ 5x_1 + 6x_2 + x_4 = 30 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 20 \end{cases}.$$

При этом в далее получаемом решении переменные x_3 и x_4 будут соответствовать объемам неиспользованного сырья S_1 и S_2 , а x_5 – неиспользованному машинному времени.

1.4. Методы решения задач ЛП

Методы решения задач ЛП делятся на два типа: точные и приближенные. Точные или конечные методы представляют собой симплексные методы оптимизации, среди которых можно выделить:

- непосредственно симплексный метод, называемый также методом последовательного улучшения плана;
- модифицированный симплексный метод;
- двойственный симплексный метод, называемый также методом последовательного уточнения оценок;
- метод одновременного решения прямой и двойственной задач, называемый также методом последовательного сокращения невязок.

К приближенным методам оптимизации относят различные варианты градиентных схем оптимизации, методы случайного поиска и т.д.

Наибольшее распространение получили симплексные методы решения задачи ЛП, по существу представляющие собой последовательный перебор угловых точек, при котором значение целевой функции улучшается от итерации к итерации (от одной угловой точки к другой).

Поясним общую суть этих методов. Для задачи ЛП в канонической форме с n переменными, подчиненными m ограничениям ($m < n$), можно получить решение (хотя и не всегда допустимое), придавая каким либо из ($n - m$) переменным произвольные значения и разрешая систему m уравнений относительно оставшихся m переменных. Особенно интересны решения такого типа, когда ($n - m$) переменных приравниваются нулю. Такое решение называют ***базисным решением*** системы из m уравнений с n неизвестными. Переменные, приравненные к нулю, называются ***свободными***, остальные – ***базисными*** и образуют ***базис***.

Если полученное решение содержит только положительные компоненты, то оно называется ***базисным допустимым*** или ***опорным планом***.

Особенность допустимых базисных решений состоит в том, что они являются крайними точками ОДР расширенной задачи, т.е. угловой точкой многогранника решений.

Опорное решение называется **невырожденным**, если оно содержит m положительных компонент (по числу ограничений).

Невырожденный опорный план образуется пересечением n гиперплоскостей из образующих допустимую область. В случае вырожденности в угловой точке многогранника решений пересекается более n гиперплоскостей.

1.5. Симплексный метод

Метод предназначен для решения общей задачи линейного программирования, записанной в канонической форме (6).

Векторы условий, соответствующие $x_{n+1},...,x_{n+m}$, образуют базис. Переменные $x_{n+1},...,x_{n+m}$ назовем базисными переменными. Остальные переменные задачи – свободные.

Если приравнять свободные переменные нулю

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ ...;\ x_n = 0,$$

то соответствующие базисные переменные примут значения

$$x_{n+1} = b_1;\ x_{n+2} = b_2;\ ...;\ x_m = b_m.$$

Вектор $\mathbf{x}$ с такими компонентами представляет собой угловую точку многогранника решений (допустимую) при условии, что $b_i \geq 0$ (опорный план).

Теперь необходимо перейти к другой угловой точке с меньшим значением целевой функции. Для этого следует выбрать некоторую небазисную переменную и некоторую базисную так, чтобы после того, как мы “поменяем их местами”, значение целевой функции уменьшилось. Такой направленный перебор в конце концов приведет нас к решению задачи.

Пример

Проиллюстрируем на нашем примере

$$f(\mathbf{x}) = 50x_1 + 40x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 + x_3 = 40 \\ 5x_1 + 6x_2 + x_4 = 30 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 20 \end{cases}.$$

Выберем в качестве базисных следующие переменные $\{x_3, x_4, x_5\}$ *и разрешим систему относительно этих переменных. Система ограничений примет следующий вид:*

$$\begin{cases} x_3 = 40 - 8x_1 - 5x_2 \\ x_4 = 30 - 5x_1 - 6x_2 \\ x_5 = 20 - 2x_1 - 5x_2 \end{cases}.$$

Переменные $\{x_1, x_2\}$ *являются свободными. Если взять* $x_1 = 0$ *и* $x_2 = 0$, *то получим угловую точку (опорный план)*

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 & 30 & 20 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

которому соответствует $f\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = 0$ *(т.е. продукция не выпускается).*

Значение целевой функции можно увеличить за счет увеличения x_1. *При увеличении* x_1 *величины* x_3, x_4 *и* x_5 *уменьшаются. Причем величина* x_3 *раньше может стать отрицательной. Поэтому, вводя в базис переменную* x_1, *одновременно* x_3 *исключаем из базиса.*

В результате после очевидных преобразований получим следующие выражения для новой системы базисных переменных и целевой функции:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - \frac{1}{8}x_3 - \frac{5}{8}x_2 \\ x_4 = 5 + \frac{5}{8}x_3 - \frac{23}{8}x_2 \\ x_5 = 10 + \frac{2}{8}x_3 - \frac{30}{8}x_2 \end{cases}$$

$$f(\mathbf{x}) = 250 - \frac{50}{8}x_3 + \frac{70}{8}x_2 \to \max.$$

Соответствующий опорный план $\mathbf{x}^{(1)} = (5 \quad 0 \quad 0 \quad 5 \quad 10)^{\mathrm{T}}$ *и* $f\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) = 250$.

Целевую функцию можно увеличить за счет увеличения x_2*. Увеличение* x_2 *приводит к уменьшению* x_1, x_4 *и* x_5*. Причем величина* x_4 *раньше может стать отрицательной. Поэтому вводим в базис переменную* x_2*, а* x_4 *исключаем из базиса. В результате получим следующие выражения для новой системы базисных переменных и целевой функции:*

$$\begin{cases} x_1 = \frac{90}{23} - \frac{48}{8\cdot 23}x_3 + \frac{5}{23}x_4 \\ x_2 = \frac{40}{23} + \frac{5}{23}x_3 - \frac{8}{23}x_4 \\ x_5 = \frac{80}{23} - \frac{104}{8\cdot 23}x_3 + \frac{30}{23}x_4 \end{cases}$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{6100}{23} - \frac{800}{8\cdot 23}x_3 - \frac{70}{23}x_4 \to \max.$$

Соответствующий опорный план

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{90}{23} & \frac{40}{23} & 0 & 0 & \frac{80}{23} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

и значение целевой функции $f\left(\mathbf{x}^{(2)}\right) = \frac{6100}{23} \approx 265{,}2$.

Так как все коэффициенты при свободных переменных в целевой функции отрицательны, то нельзя увеличить целевую функцию за счет увеличения x_3 *или* x_4*, следовательно, полученный план* $\mathbf{x}^{(2)}$ *является оптимальным.*

1.6. Алгоритм симплексного метода

Формализованный алгоритм симплекс метода состоит из двух основных этапов: 1) построение опорного плана; 2) построение оптимального плана.

Построение опорного плана. Систему в канонической форме (6) вместе с целевой функцией перепишем в следующем виде

$$\begin{cases} x_{n+1} = -(a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n) + b_1 \\ x_{n+2} = -(a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n) + b_2 \\ \text{...} \\ x_{n+m} = -(a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n) + b_m \\ f(x) = -(-c_1 \cdot x_1 - c_2 \cdot x_2 - \ldots - c_n \cdot x_n) + 0 \end{cases} . \qquad (8)$$

Теперь задачу ЛП канонического вида можно представить в виде таблицы следующего вида, называемой ***симплекс-таблицей***.

	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_n$	
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
x_{n+2}.	a_{21}.	a_{22}.	.	a_{2n}.	b_2.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	b_n
$f(\mathbf{x})$	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$	0

Левый крайний столбец содержит базисные переменные, верхняя строчка- свободные переменные. Соответственно справа записаны постоянные члены уравнений, внизу- коэффициенты целевой функции от свободных переменных, а в правом нижнем углу записано значение целевой функции при нулевых значениях свободных переменных.

Каноническому виду задачи ЛП или соответствующей симплекс-таблице сопоставляется точка $x_1= x_2=\ldots= x_n=0$, $x_{n+1}= b_1$, $x_{n+2}= b_2$, …, $x_{n+m}= b_n$. Если при этом $b_n \geq 0$ (допустимый канонический вид), то точка является допустимой и, следовательно, вершиной области допустимых решений.

Пример

Для рассмотренного ранее примера в случае базисных переменных $\{x_3, x_4, x_5\}$ *начальная симплексная таблица будет выглядеть следующим образом:*

	$-x_1$	$-x_2$	
$x_3 =$	8	5	40
$x_4 =$	5	6	30
$x_5 =$	2	5	20
$f(\mathbf{x}) =$	-50	-40	0

Она уже соответствует опорному плану $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 40 & 30 & 20 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ *(столбец свободных членов).*

Построение оптимального плана. Для того, чтобы опорный план был оптимален, при минимизации целевой функции необходимо, чтобы коэффициенты в строке целевой функции были неположительными (в случае максимизации – неотрицательными), т.е. при поиске максимума мы должны освободиться от отрицательных коэффициентов в строке $f(\mathbf{x})$.

Если критерий не выполнен, т.е. не все коэффициенты целевой функции неотрицательны, то следует перейти от одного допустимого базисного решения к соседнему допустимому, т.е. такому, в котором множества базисных и свободных переменных изменены на один элемент. В невырожденном случае этому геометрически соответствует переход от одной вершины к другой вдоль ребра допустимой области (обе вершины принадлежат одному ребру). Этот процесс называют также ***симплекс-шагом*** или ***заменой базиса***. Опишем последовательно его этапы.

1. ***Выбор разрешающего столбца.*** Если при поиске максимума в строке целевой функции есть коэффициенты меньше нуля, то выбираем столбец с отрицательным коэффициентом в строке целевой функции в качестве разрешающего. Пусть это столбец c_l номером l. Если таких столбцов несколько, рекомендуется выбирать минимальное c_l.

2. ***Выбор разрешающей строки***. Для выбора разрешающей строки (разрешающего элемента) среди положительных коэффициентов разрешающего столбца выбираем тот (строку), для которого отношение коэффициента в столбце свободных членов к коэффициенту в разрешающем столбце минимально:

$$\frac{b_r}{a_{rl}} = \min\left\{ \frac{b_i}{a_{il}} \mid a_{il} \geq 0 \right\},$$

где a_{rl} – разрешающий (направляющий) элемент, r – разрешающая строка. Если в разрешающем столбце нет положительных коэффициентов, то целевая функция неограничена снизу (при максимизации – неограничена сверху).

3. ***Замена базиса.*** Для перехода к следующей симплексной таблице (следующему опорному плану с большим значением целевой функции) делается ***шаг модифицированного жорданова исключения*** с разрешающим элементом a_{rl}, при котором базисная переменная x_r становится свободной и одновременно свободная переменная x_l становится базисной.

- На месте разрешающего элемента ставится 1 и делится на разрешающий элемент.
- Остальные элементы разрешающего столбца меняют знак на противоположный и делятся на разрешающий элемент.
- Остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент.
- Все остальные элементы симплексной таблицы вычисляются по следующей формуле:

$$a_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rl} - a_{rj} \cdot a_{il}}{a_{rl}} = a_{ij} - \frac{a_{rj} \cdot a_{il}}{a_{rl}}.$$

Отметим, что элементы правого столбца и нижней строки пересчитываются по тому же принципу, что и элементы в центральной части таблицы.

Пример

Рассмотрим алгоритм симплекс-метода на примере.

	$-x_1$	$-x_2$	1
x_3	8	5	40
x_4	5	6	30
x_5	2	5	20
$f(\mathbf{x})$	-50	-40	0

Разрешающий элемент, который соответствует замене базисной переменной x_3 на свободную переменную x_1.

	$-x_3$	$-x_2$	1
x_1	1/8	5/8	5
x_4	-5/8	23/8	5
x_5	-2/8	30/8	10
$f(\mathbf{x})$	50/8	-70/8	250

Разрешающий элемент, который соответствует замене базисной переменной x_4 на свободную переменную x_2.

	$-x_3$	$-x_4$	1
x_1	$48/184$	$-5/23$	$90/23$
x_2	$-5/23$	$8/23$	$40/23$
x_5	$104/184$	$-30/23$	$80/23$
$f(\mathbf{x})$	$800/184$	$70/23$	$6100/23$

Все коэффициенты в строке целевой функции положительны, т.е. мы нашли оптимальное решение.

Таким образом, в точке x_1 =90/23 ≈ 3,91, x_2 =40/23 ≈ 1,74, x_3 =0, x_4 =0, x_5 =80/23≈ 3,48 *целевая функция принимает максимальное значение* $f(\mathbf{x})$=6100/23 ≈ 265,2.

При этом переменным, которые стоят в верхней строке, в базисном решении присваивается значение 0- *это свободные переменные. Каждая из переменных, стоящая в левом столбце, приравнивается к числу, записанному в правом столбце той же самой строки - это базисные переменные.*

1.7. Решение задачи линейного программирования средствами табличного процессора Excel

В Excel имеется надстройка Поиск решения, которая позволяет решать оптимизационные задачи. Предварительно необходимо убедиться, что Excel использует указанную надстройку, найдя в меню Сервис пункт Поиск решения. Если такого пункта нет, нужно установить эту надстройку. Для этого выберите в меню пункт Сервис ▸ Надстройки. В диалоговом окне найдите в списке надстроек Поиск решения и установите слева от него флажок.

Теперь решим рассматриваемый нами пример.

Введем в ячейки рабочего листа информацию как показано на рис. 2.

	A	B	C	D	E	F
1		**Переменные**		**Целевая ф-я**		
2	*Вид продукции*	P_1	P_2	*Прибыль*		
3	*Значение*	0	0	=СУММПРОИЗВ(B3:C3;B4:C4)		
4	*Прибыль от ед. прод.*	50	40	*макс*		
5						
6		**Ограничения**				
7	***Типы ресурсов***	P_1	P_2	***Расход ресурсов***	*знак*	***Запас ресурсов***
8	*Сырье* S_1	8	5	=СУММПРОИЗВ(B$3:C$3;B8:C8)	<=	40
9	*Сырье* S_2	5	6	=СУММПРОИЗВ(B$3:C$3;B9:C9)	<=	30
10	*Машинное время*	2	5	=СУММПРОИЗВ(B$3:C$3;B10:C10)	<=	20

Рис 2. Исходные данные задачи линейного программирования

Ячейки B3:C3 *отведены под значения переменных, в качестве которых выступает количество производимой продукции каждого вида. В ячейку* D3 *введена формула целевой функции, в ячейки* D8:D10 *–формулы, определяющие левые части ограничений, а в ячейки* F8:F10 *– значения правых частей ограничений.*

После этого выберем команду Сервис ▸ Поиск решения *и заполним открывшееся диалоговое окно* Поиск решения, *как показано на* рис. 3.

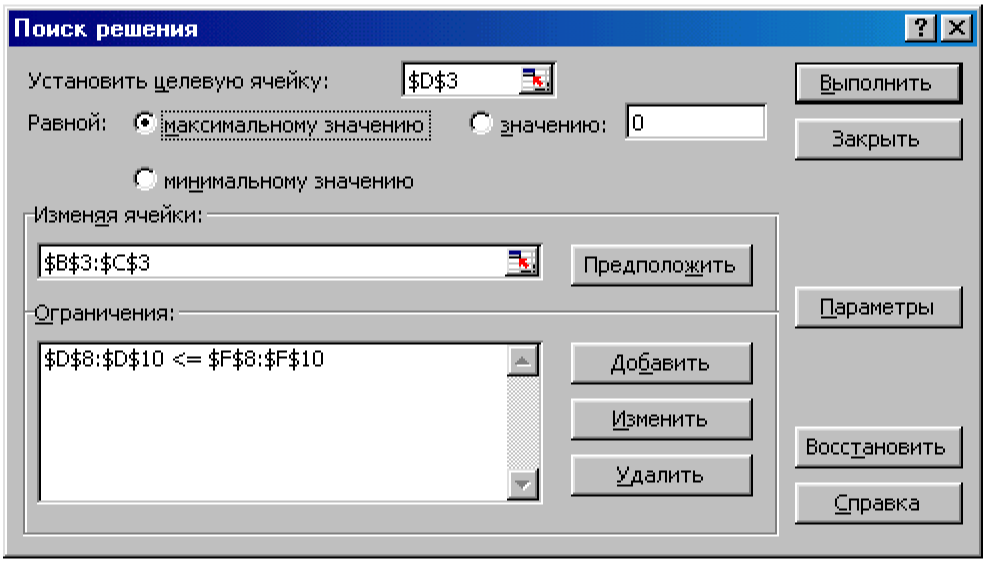

Рис.3. Диалоговое окно Поиск решения задачи ЛП

Следует отметить, что если используется Excel 5.0/7.0 необходимо ввести еще одно ограничение $B$3:$C$3>=0.

Теперь нажмите кнопку Параметры, *в диалоговом окне* Поиск решения *для того, чтобы проверить, какие параметры заданы для поиска решения.*

В открывшемся диалоговом окне Параметры поиска решения (рис.4) *можно изменять условия и варианты поиска решения исследуемой задачи, а также загружать и сохранять оптимизируемые модели. Значения и состояния элементов управления, используемые по умолчанию, подходят для решения большинства задач.*

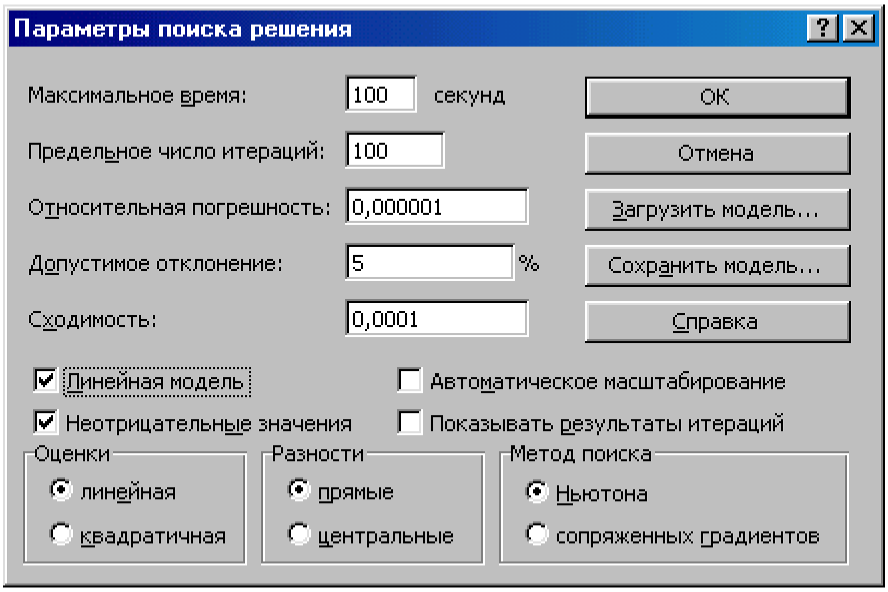

Рис.4. Диалоговое окно Параметры поиска решения

Для нашей же задачи достаточно установить два флажка Линейная модель *(так как наши ограничения и целевая функция являются линейными по переменным) и* Неотрицательные значения *(для выполнения условий* (4) *задачи ЛП).* В Excel 5.0/7.0 этот последний флажок отсутствует, поэтому и нужно было вводить ограничение $B$3:$C$3>=0. Щелкнем OK и окажемся в исходном окне.

Теперь задача оптимизации подготовлена полностью. После нажатия кнопки Выполнить *открывается окно* Результаты поиска решения, *которое сообщает, что решение найдено* (рис.5).

Однако решение задачи находится не всегда. Если условия задачи несовместны, в последнем окне выдается сообщение: Поиск не может найти подходящего решения. Если целевая функция не ограничена, то соответственно: Значения целевой ячейки не сходятся.

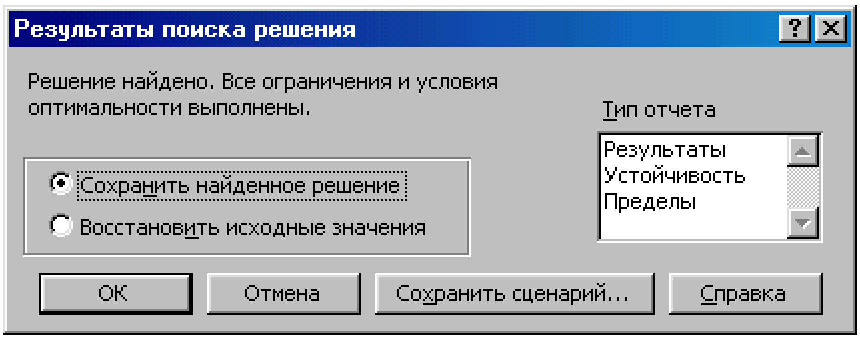

Рис.5. Диалоговое окно Результаты поиска решения

Результаты расчета нашей задачи (оптимальный план производства и соответствующая ему прибыль) представлены на рис.6.

	A	B	C	D	E	F
1		Переменные		Целевая ф-я		
2	Вид продукции	P_1	P_2	Прибыль		
3	Значение	3,913043	1,73913	265,2173913		
4	Прибыль от ед. прод.	50	40	макс		
5						
6		Ограничения				
7	Типы ресурсов	P_1	P_2	Расход ресурсов	знак	Запас ресурсов
8	Сырье S_1	8	5	40	<=	40
9	Сырье S_2	5	6	30	<=	30
10	Машинное время	2	5	16,52173913	<=	20
11						

Линейное программирование / Лист1 / Лист2 / Лист3

Рис.6. Результаты расчета задачи распределения ресурсов

1.8. Двойственная задача ЛП

С каждой задачей ЛП связана другая задача, называемая ***двойственной*** по отношению к ***исходной***. Совместное изучение данной задачи и двойственной к ней дает, как правило, значительно больше информации, чем изучение каждой из них в отдельности.

Дадим определение двойственной задачи по отношению к общей задаче ЛП, записанной в симметричной форме (5), сопоставив их в табл. 2.

Таблица 2

Исходная задача ЛП	**Двойственная задача ЛП**
$\left.\begin{array}{c} f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x} \to \max \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ge 0 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{c} \varphi(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{y} \to \min \\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{y} \ge \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \ge 0 \end{array}\right\}$ (9)

Сравнивая две задачи в табл. 2, можно определить следующие правила составления двойственной задачи.

1. Целевая функция исходной задачи (5) задается на максимум, а целевая функция двойственной (9)– на минимум.
2. Матрица $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений (2) исходной задачи и анало-

гичная матрица $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ в двойственной задаче (9) получаются друг из друга транспонированием.

3. Число переменных в двойственной задаче, т.е. y_i , $i = \overline{1,m}$ равно числу ограничений в исходной задаче (m), а число ограничений двойственной задачи – числу переменных исходной задачи, т.е. n.
4. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции $\varphi(\mathbf{y})$ двойственной задачи являются свободные члены b_i , $i = \overline{1,m}$ системы ограничений исходной задачи, а правыми частями в ограничениях двойственной задачи – коэффициенты при неизвестных c_j , $j = \overline{1,n}$ в целевой функции (1) исходной задачи.
5. Если в исходной задаче ограничения имеют знаки неравенств типа $\leq$, то в двойственной они будут иметь вид $\geq$.

Очень существенно, что при решенной симплексным методом исходной задаче для нахождения двойственных оценок, двойственную задачу решать не требуется. Их значения уже находятся в симплекс-таблице оптимального решения исходной задачи.

Определить значение двойственных оценок можно следующим образом. Если некоторый i- тый ресурс используется не полностью, т.е. имеется резерв, значит дополнительная переменная в ограничении для данного ресурса будет больше нуля.

Пример

В нашем примере таким ресурсом является машинное время, поскольку $b_3 = 20$ *и его резерв* $x_5 = 3{,}48$. *Очевидно, что при увеличении общего машинного времени не произошло бы увеличения целевой функции. Следовательно, машинное время не влияет на прибыль и для третьего ограничения двойственная переменная* $y_3 = 0$. *Таким образом, если по данному ресурсу есть резерв, то дополнительная переменная будет больше нуля, а двойственная оценка данного ограничения равна нулю.*

В рассматриваемом примере оба вида сырья использовались полностью, поэтому их дополнительные переменные равны нулю (в итоговой симплекс-таблице переменные x_3 *и* x_4 *являются свободными, значит* $x_3 = x_4 = 0$*). Если ресурс использовался полностью, то его увеличение или уменьшение повлияет на объем выпускаемой продукции и, следовательно, на величину целевой функции. Значение двойственной оценки при этом находится в симплекс-таблице на пересечении строки целевой функции со столбцом данной дополнительной переменной. Для сырья* S_1 *при* $x_3 = 0$ *двойственная оценка* $y_1 = 4{,}35$*, а для сырья* S_2 *при* $x_4 = 0$ *двойственная оценка* $y_2 = 3{,}04$.

Для большей наглядности сопоставим формулировки и результаты решения исходной и двойственной задач распределения ресурсов (табл. 3).

Таблица 3

<table>
<tr><th>Исходная задача ЛП</th><th>Двойственная задача ЛП</th></tr>
<tr><td colspan="2">Математическая постановка</td></tr>
<tr><td>$f(\mathbf{x}) = 50x_1 + 40x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 20 \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$</td><td>$\varphi(\mathbf{y}) = 40y_1 + 30y_2 + 20y_3 \to \min$
$$\begin{cases} 8y_1 + 5y_2 + 2y_3 \ge 50 \\ 5y_1 + 6y_2 + 5y_3 \ge 40 \end{cases}$$
$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Обозначения и интерпретация параметров задачи</td></tr>
<tr><td>x_j , $j = \overline{1,n}$ - количество производимой продукции j- того вида;

$f(\mathbf{x})$ – общая прибыль от реализации продукции</td><td>y_i , $i = \overline{1,m}$ - стоимость единицы i- того ресурса (на сколько возрастет ЦФ исходной задачи при увеличении на единицу запасов дефицитного сырья);
$\varphi(\mathbf{y})$ - стоимость всех имеющихся ресурсов</td></tr>
<tr><td colspan="2">Экономическая интерпретация задачи</td></tr>
<tr><td>Сколько и какой продукции необходимо произвести, чтобы при заданных стоимостях c_j , $j = \overline{1,n}$ единицы продукции и размерах имеющихся ресурсов b_i , $i = \overline{1,m}$ максимизировать общую прибыль?</td><td>Какова должна быть цена единицы каждого из ресурсов, чтобы при заданных их количествах b_i , $i = \overline{1,m}$ и величинах стоимости единицы продукции c_j , $j = \overline{1,n}$ минимизировать общую стоимость затрат?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Результаты решения</td></tr>
<tr><td>Результирующая симплекс-таблица
<table><tr><th></th><th>$-x_3$</th><th>$-x_4$</th><th></th></tr><tr><td>x_1</td><td>…</td><td>…</td><td>3,91</td></tr><tr><td>x_2</td><td>…</td><td>…</td><td>1,74</td></tr><tr><td>x_5</td><td>…</td><td>…</td><td>3,48</td></tr><tr><td>$f(\mathbf{x})$</td><td>4,35</td><td>3,04</td><td>265,22</td></tr></table>
основные переменные
x_1=3,91
x_2=1,74
дополнительные переменные
x_3=0
x_4=0
x_5=3,48</td><td>дополнительные переменные
y_4=0
y_5=0
основные переменные
y_1=4,35
y_2=3,04
y_3=0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Интерпретация дополнительных переменных</td></tr>
<tr><td>$x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ – неиспользованное (резервное) количество соответствующего ресурса (при наличие резервного ресурса соответствующая двойственная переменная равна 0)</td><td>$y_{m+1}, \ldots, y_{m+n}$ – насколько уменьшится целевая функция при принудительном выпуске единицы данной продукции (если какая-либо из основных переменных исходной задачи равна 0)</td></tr>
</table>

Каждая из задач двойственной пары (табл. 2) фактически является самостоятельной задачей ЛП и может быть решена независимо одна от другой. Однако при определении симплексным методом оптимального плана одной из задач тем самым находится решение и другой задачи. При этом $\max f(\mathbf{x}) = \min \varphi(\mathbf{y})$.

Следует отметить, что на практике для непосредственного решения двойственной задачи используется специальный ***двойственный симплексный метод***. Это связано с тем, что в двойственной задаче система ограничений представляет неравенства типа ≥, и при приведении задачи ЛП к канонической форме правые части ограничений получаются отрицательными.

Для нашего примера двойственная задача в канонической форме будет выглядеть следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{y}) = 40y_1 + 30y_2 + 20y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -8y_1 - 5y_2 - 2y_3 + y_4 = -50 \\ -5y_1 - 6y_2 - 5y_3 + y_5 = -40 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \qquad .$$

Двойственный симплексный метод может применяться при решении задачи ЛП, свободные члены системы уравнений которой могут быть любыми числами (при решении задачи симплексным методом эти числа предполагались неотрицательными). Мы же рассмотрим решение двойственной задачи с помощью табличного процессора Exel.

Решение можно произвести в том же листе рабочей книги, где решалась исходная задача (рис. 6). *Предварительно упростим этот лист, записав обозначения в общем, математическом виде (хотя это и не обязательно), оставив формулы без изменения.*

	A	B	C	D	E	F
1	**Переменные**			**Целевая ф-я**		
2	имя	x_1	x_2	$f(\mathbf{x})$		
3	значение	0	0	=СУММПРОИЗВ(B3:C3;B4:C4)		
4	коэф-ты $f(\mathbf{x})$	50	40	макс		
5						
6		**Ограничения**				
7	№	x_1	x_2	левая часть	знак	прав.часть
8	1	8	5	=СУММПРОИЗВ(B$3:C$3;B8:C8)	<=	40
9	2	5	6	=СУММПРОИЗВ(B$3:C$3;B9:C9)	<=	30
10	3	2	5	=СУММПРОИЗВ(B$3:C$3;B10:C10)	<=	20

Рис 7. Данные исходной задачи линейного программирования

К имеющимся данным добавим следующие: ячейки G8:G10 *отведем под значения двойственных переменных; в ячейку* G12 *введем формулу целевой функции*

=СУММПРОИЗВ(F8:F10;G8:G10) ;

в ячейки диапазона B12:C12 *–формулы*

=СУММПРОИЗВ(B8:B10;$G$8:$G$10)

=СУММПРОИЗВ(C8:C10;$G$8:$G$10) ,

определяющие левые части ограничений двойственной задачи.

После этого выберем команду Сервис ▸ Поиск решения *и, заполнив сначала открывшееся диалоговое окно* Поиск решения, *как показано на* рис. 3, *получим решение исходной задачи ЛП. Далее для решения двойственной задачи вновь выберем команду* Сервис ▸ Поиск решения *и заполним диалоговое окно* Поиск решения, *как показано на* рис. 8.

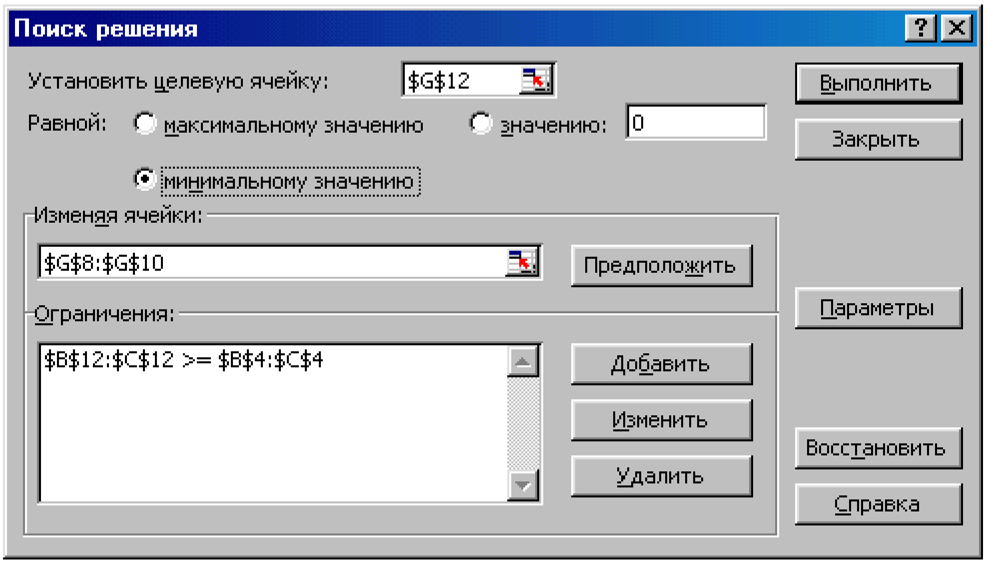

Рис.8. Диалоговое окно Поиск решения для двойственной задачи

После нажатия кнопки Выполнить *получаем результаты расчета нашей задачи, т.е. оптимальное решение исходной и двойственной задач ЛП (выделено серым фоном), приведенное на* рис.9.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Переменные		Целевая ф-я			
2	имя	x_1	x_2	$f(\mathbf{x})$			
3	значение	3,913043	1,73913	265,2173913			
4	коэф-ты $f(\mathbf{x})$	50	40	макс			
5							Двойств.
6		Ограничения					оценки
7	№	x_1	x_2	левая часть	знак	правая часть	$\mathbf{y}$
8	1	8	5	40	<=	40	4,347826087
9	2	5	6	30	<=	30	3,043478261
10	3	2	5	16,52173913	<=	20	0
11	Огр-я двойственной задачи				Целевая ф-я двойств. задачи		
12		50	40				265,2173913
13							

Двойственная задача / Транспортная задача / Лист5

Рис.9. Результаты расчета исходной и двойственной задачи ЛП

2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. Целочисленная задача ЛП

Задачи оптимизации, в результате решения которых искомые переменные должны быть целыми числами, называются задачами целочисленного программирования. В том случае, когда ограничения и целевая функция представляют собой линейные зависимости, задачу называют целочисленной задачей ЛП. Ограничимся рассмотрением последней задачи.

Значительная часть экономических задач ЛП требует целочисленного решения, например, распределение производственных заданий между предприятиями, раскрой материалов, распределение транспорта по рейсам, а также производство неделимой продукции. Если единица составляет малую часть всего объема производства, то оптимальное решение находят обычным симплексным методом, округляя его до целых единиц, исходя из смысла задачи. В противном случае округление может привести к решению, далекому от оптимального целочисленного решения или вообще недопустимому.

Для решения целочисленных задач ЛП разработаны специальные методы:

- метод сечения Гомори [1, 5, 9], в основе которого лежит описанный выше симплексный метод;
- метод ветвей и границ [5].

Рассмотрим решение задачи целочисленного ЛП с помощью табличного процессора Excel.

Пример

Пусть в рассмотренном выше примере решения задачи распределения ресурсов, изготавливаемые виды продукции P_1 и P_2 являются неделимыми (например, предметы мебели- полки, стулья). Простое округление, полученного ранее решения, т.е. $P_1 = 3{,}91 \approx 4$ и $P_2 = 1{,}74 \approx 2$ как легко убедиться из рис. 1 *приводит к выходу за пределы ОДР.*

Для решения поставленной задачи перейдем к исходному листу рабочей книги приведенному на рис.2 *и выберем команду* Сервис ▸ Поиск решения. *В открывшемся диалоговом окне* Поиск решения *необходимо добавить еще одно ограничение целочисленности для ячеек, содержащих искомое количество производимой продукции. Для этого нажимаем кнопку* Добавить *и в диалоговом окне* Добавление ограничения (рис.10) *указываем, что* $B$3:$C$3 – *целые (в том же выпадающем списке, откуда выбирается символ для ограничения).*

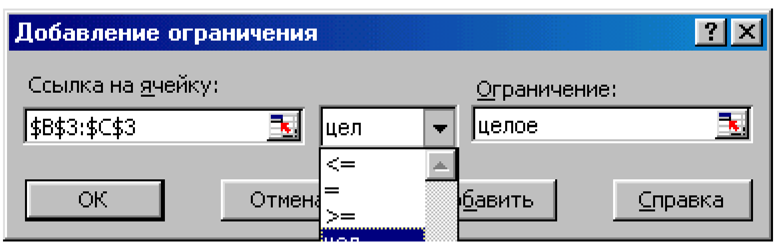

Рис.10. Диалоговое окно Добавление ограничения

В результате диалоговое окно Поиск решения *приобретает вид, как показано на* рис.11.

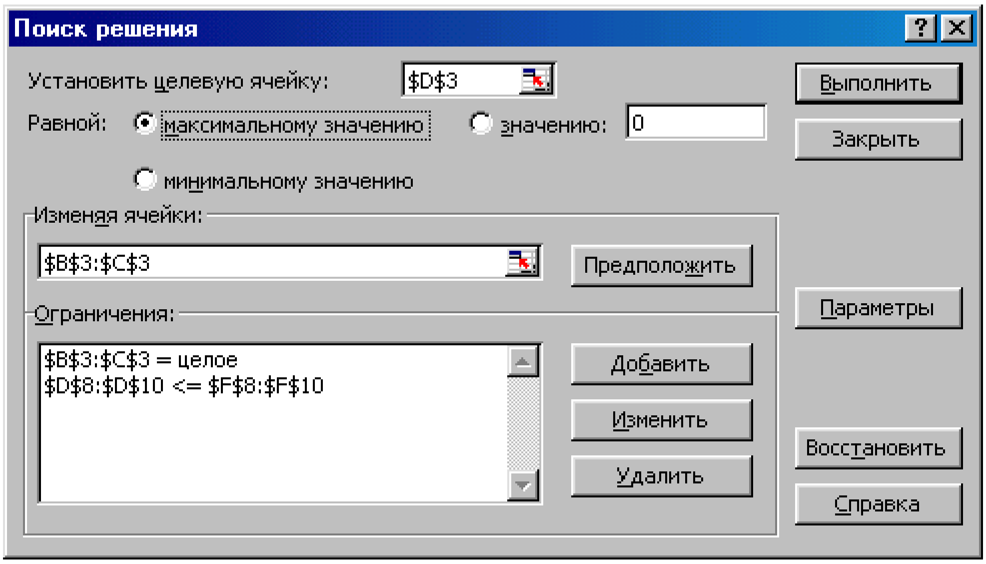

Рис. 11. Диалоговое окно поиск решения для целочисленной задачи ЛП

Нажимаем кнопку Выполнить*, в результате чего получаем решение, показанное на* рис.12.

	A	B	C	D	E	F
1		**Переменные**		**Целевая ф-я**		
2	*Вид продукции*	P_1	P_2	*Прибыль*		
3	*Значение*	5	0	250		
4	*Прибыль от ед. прод.*	50	40	*макс*		
5						
6		**Ограничения**				
7	**Типы ресурсов**	P_1	P_2	**Расход ресурсов**	*знак*	**Запас ресурсов**
8	*Сырье S_1*	8	5	40	<=	40
9	*Сырье S_2*	5	6	25	<=	30
10	*Машинное время*	2	5	10	<=	20
11						

Рис. 12. Результаты решения целочисленной задачи ЛП

Как видим из полученного решения, оптимальным является выпуск продукции P_1 в количестве 5 единиц; выпуск же продукции P_2 вообще экономически нецелесообразен. Данное решение находится достаточно далеко от найденного ранее и не является округлением значений, полученных без ограничения целочисленности. Значение целевой функции при этом, естественно, ухудшилось.

К задачам целочисленного программирования относят также задачи, где некоторые переменные могут принимать всего два значения: 0 и 1. Такие переменные называют булевыми, двоичными, бинарными. При решении таких задач следует в списке ограничений на переменные указывать - двоичное.

2.2. Транспортная задача линейного программирования

Линейные транспортные задачи составляют особый класс задач ЛП. Общая постановка транспортной задачи состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из m пунктов отправления (ПО) A_1, A_2, …,A_m в n пунктов назначения (ПН) B_1, B_2, …,B_m. При этом в качестве критерия оптимальности обычно берется либо минимальная стоимость перевозок всего груза, либо минимальное время его доставки. Рассмотрим транспортную задачу, в качестве критерия оптимальности которой взята минимальная стоимость перевозок всего груза. Обозначим через c_{ij} тарифы перевозки единицы груза из i – того ПО в j – тый ПН, через a_i – запасы груза в i – том ПО, через b_j – потребности в грузе в j – том ПН, а через x_{ij} – количество единиц груза, перевозимого из i – того ПО в j – тый ПН. Предполагается, что транспортные расходы пропорциональны перевозимому количеству продукции, т.е. перевозка k единиц продукции вызывает расходы $c_{ij}\,k$.

Тогда математическая постановка задачи состоит в определении минимального значения целевой функции

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{10}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,, \quad j = \overline{1, n}\ , \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,, \quad i = \overline{1, m}\ , \tag{12}$$

$$x_{ij} \geq 0\,, \quad i = \overline{1, m} \quad, \quad j = \overline{1, n}\ . \tag{13}$$

Поскольку переменные x_{ij} удовлетворяют системам линейных уравнений (11) и(12) и условию неотрицательности (13), обеспечиваются доставка необходимого количества груза в каждый из ПН, вывоз имеющегося груза из всех ПО, а также исключаются обратные перевозки.

Очевидно, общее количество груза у поставщиков равно $\sum_{i=1}^{m} a_i$, а общая потребность в грузе в ПН равна $\sum_{j=1}^{n} b_j$ единиц. Если общая потребность в грузе в пунктах назначения равна запасу груза в ПО, т.е. $\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i$, то модель такой транспортной задачи называется ***закрытого*** типа. Если модель ***открытого*** типа $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j \neq \sum_{i=1}^{m} a_i\right)$, то ее всегда можно привести к закрытому типу введением фиктивного ПН или фиктивного ПО:

- Если $\sum_{j=1}^{n} b_j < \sum_{i=1}^{m} a_i$, то $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, тогда $\sum_{j=1}^{n+1} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i$, причем $c_{i,n+1} = 0 \quad \forall i$.
- Если $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$, то $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, $\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m+1} a_i$ и $c_{m+1,j} = 0 \quad \forall j$.

Впрочем, стоимость перевозок для фиктивного ПН, т.е. $c_{i,n+1}$, может не всегда быть равной нулю, а приравниваться стоимости складирования излишков продукции, так же как и для фиктивного ПО - $c_{m+1,j}$ может составить стоимость штрафов за недопоставку продукции.

Транспортная задача представляет собой задачу линейного программирования и, естественно, ее можно решить с использованием метода последовательного улучшения плана или метода последовательного уточнения оценок. В этом случае основная трудность бывает связана с числом переменных задачи ($m \times n$) и числом ограничений ($m+n$). Поэтому специальные алгоритмы оказываются более эффективными. К таким алгоритмам относятся ***метод потенциалов*** и ***метод дифференциальных рент***.

Алгоритм метода потенциалов, его называют еще модифицированным распределительным алгоритмом, начинает работу с некоторого опорного плана транспортной задачи (допустимого плана перевозок). Для построения опорного плана обычно используется один из трех методов: ***метод северо-западного угла***, ***метод минимального элемента*** или ***метод аппроксимации Фогеля***.

Подробно эти методы освещаются в специальной литературе [1, 9]. Мы же будем рассматривать решение транспортной задачи с использованием табличного процессора Exel.

Пример

Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции используют три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны 120, 50, 90 и 110 ед. Сырье сосредоточено в трех местах его получения, а запасы соответственно равны 160, 140 и 170 ед. На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок являются известными величинами и задаются матрицей издержек:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок, при котором общая их стоимость является минимальной.

Решение

Приведенные исходные данные обычно представляют в виде следующей таблицы издержек (табл. 4).

Таблица 4.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1	2	160
A_2	4	5	9	8	140
A_3	9	2	3	6	170
Потребности	120	50	190	110	470

Обозначим через x_{ij} количество единиц сырья, перевозимого из i – того пункта его получения на j – тое предприятие. Тогда условия доставки и вывоза необходимого и имеющегося сырья обеспечиваются за счет выполнения следующих равенств:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} = 160 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} = 140 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} = 170 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31} = 120 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} = 50 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} = 190 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34} = 110 \end{cases} \qquad (14)$$

При этом общая стоимость перевозок составит

$$f(\mathbf{x}) = 7x_{11} + 8\,x_{12} + x_{13} + 2\,x_{14} + 4\,x_{21} + 5\,x_{22} + 9\,x_{23} + 8\,x_{24} + 9\,x_{31} + 2\,x_{32} + 3\,x_{33} + 6\,x_{34}\,.$$

Таким образом, математическая постановка данной транспортной задачи состоит в нахождении такого неотрицательного решения системы линейных уравнений (14)*, при котором целевая функция* $f(\mathbf{x})$ *принимает минимальное значение.*

Для решения этой задачи средствами надстройки Excel Поиск решения *введем данные, как показано на* рис.13.

Здесь в ячейки B4:E6 *введены стоимости перевозок. Ячейки* B10:E12 *отведены под значения неизвестных (объемы перевозок). В ячейки* F4:F6 *введены запасы сырья в местах его получения, а в ячейки* B7:E7 *соответственно потребность в сырье каждого из предприятий.*

В ячейки F10:F12 *введены формулы, определяющие объем вывозимого сырья, а в ячейки* B13:E13 *– объем сырья ввозимого на предприятия. В ячейку* F14 *введена целевая функция.*

	A	B	C	D	E	F
1		**Таблица издержек**				
2	Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
3		B_1	B_2	B_3	B_4	
4	A_1	7	8	1	2	160
5	A_2	4	5	9	8	140
6	A_3	9	2	3	6	170
7	Потребности	120	50	190	110	
8						
9		**Транспортная таблица**				
10	A_1					=СУММ(B10:E10)
11	A_2					=СУММ(B11:E11)
12	A_3					=СУММ(B12:E12)
13	Потребности	=СУММ(B10:B12)	=СУММ(C10:C12)	=СУММ(D10:D12)	=СУММ(E10:E12)	
14			*Транспортные расходы*			=СУММПРОИЗВ(B4:E6;B10:E12)

Рис. 13. Исходные данные транспортной задачи

Теперь выберем команду Сервис ▸ Поиск решения *и заполним открывшееся диалоговое окно* Поиск решения, *как показано на* рис. 14.

Не забудьте в диалоговом окне Параметры поиска решения *установить флажки* Линейная модель *и* Неотрицательные значения.

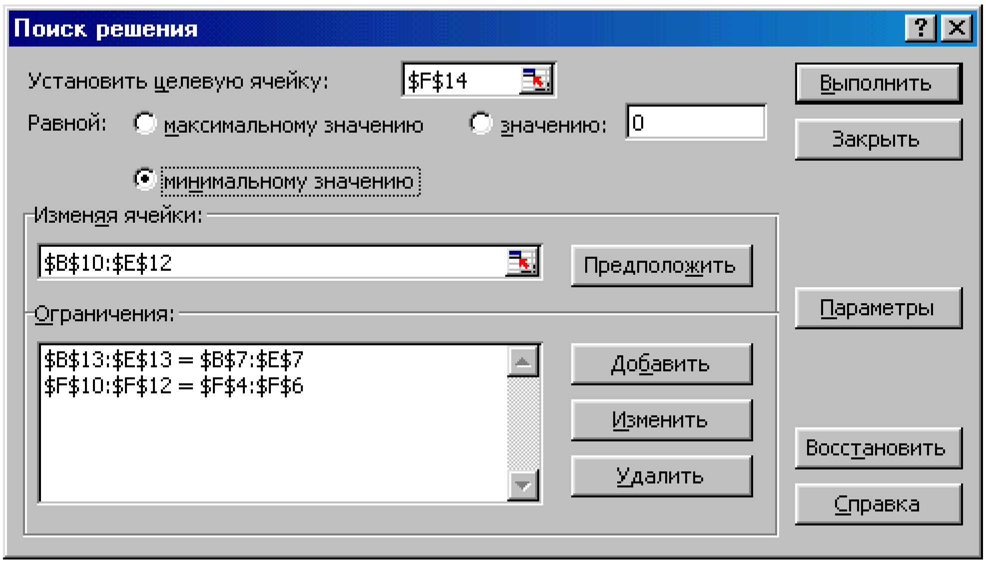

Рис. 14. Диалоговое окно Поиск решения для транспортной задачи

После нажатия кнопки Выполнить *средство поиска решения находит оптимальный план поставок сырья и соответствующие ему транспортные расходы, которые на* рис 15. *выделены серым фоном.*

	A	B	C	D	E	F
1		**Таблица издержек**				
2	Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
3		B_1	B_2	B_3	B_4	
4	A_1	7	8	1	2	160
5	A_2	4	5	9	8	140
6	A_3	9	2	3	6	170
7	Потребности	120	50	190	110	
8						
9		**Транспортная таблица**				
10	A_1	0	0	50	110	160
11	A_2	120	20	0	0	140
12	A_3	0	30	140	0	170
13	Потребности	120	50	190	110	
14			*Транспортные расходы*			1330

Лист2 / Лист3 / **Транспортная задача**

Рис. 15. Оптимальное решение транспортной задачи

3. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ (НП)

В задаче НП требуется найти такой вектор переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которого

$$f(\mathbf{x}) \to \max(\min) \tag{15}$$

при условиях

$$\begin{cases} h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad , \quad i = \overline{1,k}, \\ g_i(\mathbf{x}) \le 0 \quad , \quad i = \overline{k+1,m} \end{cases} \tag{16}$$

При этом целевая функция $f(\mathbf{x})$, ограничения- равенства $h_i(\mathbf{x})$ и неравенства $g_i(\mathbf{x})$ являются некоторыми известными функциями произвольного вида.

3.1. Классические методы решения задач оптимизации с ограничениями типа равенств

Рассмотрим частный случай общей задачи НП (15), (16), предполагая, что система ограничений (16) содержит только уравнения, а $f(\mathbf{x})$ и $h_i(\mathbf{x})$ – функции непрерывные вместе со своими частными производными:

$$f(\mathbf{x}) \to \max(\min) \tag{17}$$

при

$$h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad , \quad i = \overline{1,m} \ . \tag{18}$$

В курсе математического анализа данную задачу называют задачей на условный экстремум или классической задачей оптимизации.

Структура допустимого множества D, на котором определен критерий, зависит от соотношения числа уравнений m и числа неизвестных n. Соотношение $d = n - m$ называют дефектом системы.

При $d = 0$, если система уравнений (18) является совместной, D представляет собой совокупность корней данной системы уравнений. В этом случае для решения задачи (17)-(18) достаточно просмотреть эту совокупность и выбрать ту точку, в которой $f(\mathbf{x})$ достигает оптимального значения. Если система линейна, то система имеет единственный корень. Если нелинейна, то число корней может быть сколь угодно большим.

При положительном дефекте в случае линейной системы (18) и $d = 1$ множество D представляет собой прямую, в случае $d = 2$ – плоскость, при $d = 3$ – многогранник типа конуса и т.д.

В случае нелинейной системы (18) при $d = 1$ множество D представляет собой некоторую кривую, при $d = 2$ – поверхность, при $d = 3$ и более – конус.

При $d < 0$, исключив лишние ограничения, придем к одному из рассмотренных вариантов или определим несовместность системы.

При $d > 0$ для решения задачи (17)-(18) обычно, если это удается, поступают следующим образом. Часть переменных, а именно m, выразим в явном виде из (18) через другие $n - m$, т.е.

$$\left.\begin{array}{l} x_{n-m+1} = \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}) \\ x_{n-m+2} = \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \psi_m(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}) \end{array}\right\} \tag{19}$$

В критерий $f(\mathbf{x})$ вместо $x_{n-m+1},\ x_{n-m+2},\ \dots,\ x_n$ подставляем выражения из (19)

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_{n-m}, \psi_1(x_1, x_2, ..., x_{n-m}), ..., \psi_m(x_1, x_2, ..., x_{n-m})).$$

В результате получаем задачу безусловной оптимизации меньшей размерности

$$f(x_1, x_2, ..., x_{n-m}, \psi_1(x_1, x_2, ..., x_{n-m}), ..., \psi_m(x_1, x_2, ..., x_{n-m})) \to \min(\max).$$

Следовательно, можем воспользоваться необходимыми условиями экстремума и найти решение задачи (17)-(18), решив систему

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial f(\cdot)}{\partial x_1} = 0 \\ \dots \\ \dfrac{\partial f(\cdot)}{\partial x_{n-m}} = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Самое сложное при таком подходе разрешить систему ограничений, представив ее в виде (19). Далеко не всегда удается получить разрешение в форме (19) в элементарных функциях; в этом случае обычно используется *метод множителей Лагранжа*.

3.2. Метод множителей Лагранжа

Для решения задачи (17)-(18) вводят набор дополнительных переменных $\lambda_1,\ \lambda_1,\ \dots,\ \lambda_m$, называемых ***множителями Лагранжа*** и составляют ***функцию Лагранжа***

$$F(\mathbf{x},\lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(\mathbf{x}). \qquad (20)$$

Можно доказать, что необходимые условия экстремума функции $f(\mathbf{x})$ при наличии ограничений можно получить, приравняв нулю частные производные функции $F(\mathbf{x}, \lambda)$ по всем x_j, $j = \overline{1,n}$, и по всем λ_i, $i = \overline{1,m}$. Точка, в которой достигается относительный максимум или минимум должна удовлетворять следующей системе из $m+n$ уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \lambda_i} = h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = \overline{1,m}. \end{cases} \qquad (21)$$

Каждая точка $\mathbf{x}^*$, в которой достигается относительный максимум или минимум при $\mathbf{x} \in D$, будет являться решением системы (21).

Следует особо подчеркнуть, что метод множителей Лагранжа позволяет найти лишь необходимые условия существования условного экстремума для непрерывных функций, имеющих к тому же непрерывные производные. Полученные в результате решения системы уравнений (21) значения неизвестных x_i могут и не давать экстремального значения функции $f(\mathbf{x})$, точно так же как в задачах на безусловный экстремум. Поэтому найденные таким образом значения переменных, вообще говоря, должны быть проверены на экстремум с помощью анализа производных более высокого порядка или какими либо другими методами.

Пример. *Рассчитать размеры цилиндрической емкости заданного объема V= 1 $м^3$, которая имела бы минимальную поверхность S.*

Решение. *Критерием оптимальности рассматриваемой задачи, является зависимость величины поверхности от размеров емкости*

$$S = 2\pi(r^2 + rh) \quad \to \min, \tag{22}$$

где r – радиус цилиндра; h – его высота.

В используемых обозначениях объем этой емкости описывается выражением

$$V = \pi r^2 h, \tag{23}$$

которое нужно считать ограничением на переменные r и h при минимизации S.

Поскольку данный пример является достаточно простым, задачу можно решить и классическим методом, выразив из условия (23) *h:* $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$,

и подставив это выражение в целевую функцию (22)*, что приводит ее к виду:*

$$S = 2\pi\left(r^2 + \frac{V}{\pi r}\right).$$

Таким образом, избавившись от ограничения, мы одновременно сократили размерность задачи, приведя ее к задаче безусловной оптимизации функции одной переменной, которую можно решить, воспользовавшись необходимыми и достаточными условиями экстремума.

Однако не каждую задачу можно решить подобным образом, поэтому для примера рассмотрим решение приведенной задачи методом множителей Лагранжа.

Для того, чтобы привести условие (23) *к виду соотношений* (18) *перепишем его в форме* $V - \pi r^2 h = 0$.

Составим далее вспомогательную функцию Лагранжа (20) *для этой задачи* $F = 2\pi(r^2 + rh) + \lambda(V - \pi r^2 h)$.

Дифференцированием данного выражения по r, h и λ находим систему уравнений, соответствующую системе (21)*:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r} = 2\pi(2r + h) - 2\pi\lambda r h = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial h} = 2\pi r - \pi\lambda r^2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = V - \pi r^2 h = 0 \end{cases}. \tag{24}$$

Из второго уравнения системы (24) *получим* r_1=0 , $r_2 = \dfrac{2}{\lambda}$. *Первое из найденных значений, как нетрудно видеть, отвечает нулевому значению поверхно-*

сти S, что хотя и соответствует экстремальной точке функции (22)*, т.е. точке минимума, но не удовлетворяет требованию получения заданного объема V. Поэтому для дальнейших рассуждений имеет смысл только второе значение r_2. Подставляя это значение в первое уравнение системы* (24) *найдем выражение h через λ:* $h = \dfrac{4}{\lambda}$.

Теперь можно определить величину λ, если подставить в третье уравнение системы (24) *значения r и h, выраженные через λ :*

$$V - \pi\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \frac{4}{\lambda} = 0 \quad \text{или} \quad V - \frac{16\pi}{\lambda^3} = 0 \ .$$

Отсюда

$$\lambda = 2\sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}} \ .$$

Подставляя далее найденное значение λ в формулы для r и h, получим:

$$r = \frac{2}{\lambda} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx 0{,}542 \text{ м}$$

$$h = \frac{4}{\lambda} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx 1{,}084 \text{ м}$$

Далее найдем решение нашей задачи с помощью надстройки Excel Поиск решения. *Приведем сразу полученный результат* (рис.16)*, по которому достаточно легко самостоятельно заполнить рабочий лист* Excel.

	A	B	C
1	Переменные		Целевая ф-я
2	r	h	$S(r,h)$
3	0,5418656	1,08409344	5,535808052
4			min
5	Ограничения		
6	V	знак	правая часть
7	0,9999993	=	1
8			

Нелинейное программирование

Рис. 16. Результаты решения задачи нелинейного программирования

Метод множителей Лагранжа можно применять и в том случае, когда условия связи представляют собой неравенства, преобразовав их к равенствам, как показано в п.1.3. Например, ограничения типа $g_i(\mathbf{x}) \le 0$ можно преобразовать в ограничения в виде равенств путем добавления к каждому из них неотрицательной ***ослабляющей переменной*** u_i^2 (отметим, что переменная u_i^2 всегда положительна): $g_i(\mathbf{x}) + u_i^2 = 0$.

Следует отметить, что множители Лагранжа используют также в качестве вспомогательного средства при решении специальными методами других задач, например в вариационном исчислении и динамическом программировании.

4. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

Лабораторная работа №1

Решение задачи ЛП графическим и симплексным методами

Задание. Для заданной математической постановки задачи ЛП, приняв дополнительно условие неотрицательности переменных, выполнить следующие действия:

- решить задачу графическим методом;
- привести задачу к канонической форме записи;
- составить симплексную таблицу;
- произвести решение задачи симплексным методом ручным способом или с использованием компьютера;
- осуществить постановку двойственной задачи ЛП;
- получить решение двойственной задачи из полученной ранее симплексной таблицы и произвести анализ полученных результатов;
- проверить результаты решения в табличном процессоре Excel;
- составить отчет с приведением результатов по каждому пункту.

Варианты заданий приведены в табл. 5.

Таблица 5

№ вар-та	Постановка задачи	№ вар-та	Постановка задачи
1	$f(\mathbf{x}) = 4x_1 + 2x_2 \to \max$ $x_1 + 3x_2 \le 36$ $1{,}9x_1 + 2x_2 \le 29$ $34{,}2x_1 + 3x_2 \le 419{,}5$	5	$f(\mathbf{x}) = x_1 + 4x_2 \to \max$ $0{,}3x_1 + 2x_2 \le 4$ $x_1 + 3x_2 \le 6{,}3$ $22{,}8x_1 + 2x_2 \le 48{,}5$
2	$f(\mathbf{x}) = 5x_1 + 3x_2 \to \max$ $3x_2 \le 12$ $x_1 + 3x_2 \le 13{,}4$ $1{,}3x_1 + x_2 \le 8{,}7$	6	$f(\mathbf{x}) = 2x_1 + 4x_2 \to \max$ $0{,}5x_1 + 2x_2 \le 24$ $5{,}1x_1 + 3x_2 \le 53{,}5$ $6{,}4x_1 + 3x_2 \le 62{,}4$
3	$f(\mathbf{x}) = x_1 + 5x_2 \to \max$ $0{,}7x_1 + 2x_2 \le 12$ $1{,}7x_1 + 3x_2 \le 19{,}2$ $11{,}3x_1 + 2x_2 \le 73{,}9$	7	$f(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 \to \max$ $1{,}7x_1 + 3x_2 \le 24$ $2{,}3x_1 + 2x_2 \le 19{,}2$ $x_1 \le 8$
4	$f(\mathbf{x}) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$ $0{,}2x_1 + 3x_2 \le 18$ $0{,}7x_1 + 2x_2 \le 13{,}1$ $2{,}3x_1 + 2x_2 \le 23$	8	$f(\mathbf{x}) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$ $0{,}4x_1 + x_2 \le 3$ $1{,}7x_1 + 3x_2 \le 9{,}3$ $11{,}4x_1 + x_2 \le 35{,}6$

Продолжение табл.5

№ вар-та	Постановка задачи	№ вар-та	Постановка задачи
9	$f(\mathbf{x}) = 4x_1 + 4x_2 \to \max$ $0{,}9x_1 + 2x_2 \le 6$ $1{,}1x_1 + 2x_2 \le 6{,}2$ $2{,}9x_1 - 6{,}5x_2 \le 13{,}1$	18	$f(\mathbf{x}) = 5x_1 + 2x_2 \to \max$ $2x_2 \le 8$ $2{,}5x_1 + 3x_2 \le 15{,}3$ $11{,}1x_1 + 3x_2 \le 50$
10	$f(\mathbf{x}) = 5x_1 + x_2 \to \max$ $0{,}4x_1 + 2x_2 \le 5$ $2{,}5x_1 + 3x_2 \le 16{,}8$ $x_1 \le 5$	19	$f(\mathbf{x}) = 4x_1 + x_2 \to \max$ $0{,}9x_1 + 2x_2 \le 30$ $4{,}2x_1 + 3x_2 \le 59{,}4$ $4{,}2x_1 + 2x_2 \le 53{,}1$
11	$f(\mathbf{x}) = x_1 + 4x_2 \to \max$ $x_2 \le 3$ $0{,}9x_1 + x_2 \le 3{,}9$ $3{,}4x_1 + 2x_2 \le 12{,}2$	20	$f(\mathbf{x}) = 5x_1 + 2x_2 \to \max$ $0{,}5x_1 + x_2 \le 12$ $2{,}9x_1 + 3x_2 \le 41$ $2{,}7x_1 + x_2 \le 34{,}6$
12	$f(\mathbf{x}) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$ $0{,}5x_1 + x_2 \le 1$ $2{,}8x_1 + 2x_2 \le 2{,}5$ $3{,}4x_1 + 2x_2 \le 2{,}9$	21	$f(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 \to \max$ $-x_1 + 1{,}5x_2 \le 2$ $x_1 + 2x_2 \le 6$ $x_1 - x_2 \le 4$
13	$f(\mathbf{x}) = x_1 + 5x_2 \to \max$ $x_2 \le 2$ $0{,}5x_1 + 0{,}9x_2 \le 3$ $1{,}2x_1 - 2x_2 \le 5$	22	$f(\mathbf{x}) = 2x_1 + 5x_2 \to \max$ $1{,}7x_1 + 3x_2 \le 18$ $2{,}5x_1 + 3x_2 \le 19{,}5$ $4{,}2x_1 + 3x_2 \le 30{,}1$
14	$f(\mathbf{x}) = 2x_1 + 5x_2 \to \max$ $0{,}7x_1 + 2x_2 \le 2$ $1{,}1x_1 + 0{,}5x_2 \le 1{,}2$ $2x_1 - x_2 \le 1$	23	$f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \to \max$ $-2x_1 + 3x_2 \le 5$ $1{,}1x_1 + 2x_2 \le 12$ $3x_1 - 2x_2 \le 8$
15	$f(\mathbf{x}) = 3x_1 + 5x_2 \to \max$ $0{,}7x_1 + x_2 \le 2$ $x_1 - x_2 \le 0{,}5$ $11x_1 + 2x_2 \le 11{,}5$	24	$f(\mathbf{x}) = 0{,}8x_1 + x_2 \to \max$ $2x_1 + x_2 \le 1$ $x_1 + 2x_2 \le 1{,}2$ $2{,}5x_1 - x_2 \le 1$
16	$f(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max$ $x_1 + x_2 \le 1$ $10x_1 - 5x_2 \le 5$ $-5x_1 + 20x_2 \le 10$	25	$f(\mathbf{x}) = -2x_1 + 5x_2 \to \max$ $7x_1 + 2x_2 \le 20$ $1{,}1x_1 + 4x_2 \le 12$ $2x_1 - x_2 \le 4$
17	$f(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_2 \to \max$ $-x_1 + 2x_2 \le 2$ $x_1 + 2x_2 \le 6$ $x_1 - 2x_2 \le 4$		

Лабораторная работа №2

Решение задачи ЛП средствами табличного процессора Excel

Задание. Для заданной содержательной постановки задачи ЛП выполнить следующие действия:

- осуществить математическую запись задачи линейного программирования;
- решить задачу с использованием надстройки Excel “Поиск решения”;
- привести математическую постановку двойственной задачи ЛП;
- получить решение двойственной задачи ЛП с использованием надстройки Excel “Поиск решения”;
- получить решение задачи в предположении целочисленности переменных;
- произвести анализ полученных результатов и дать их содержательную интерпретацию;
- оформить отчет с выделением результатов по каждому пункту.

Варианты заданий

1. Определить набор продуктов в магазинах, дающий наибольшую общую прибыль по всем магазинам. Исходные числовые данные и ограничения задачи приведены в табл. 6.

Таблица 6

Магазины	Время, затрачиваемое магазинами на продажу единицы продукта, ч			Возможное время работы магазина, ч	Примечание
	А	Б	В		
1 2 3	2 4 3	4 2 0	3 3 1	до 48 до 60 до 36	1. Все продукты могут быть проданы за указанное время
Уровень прибыли от продажи единицы продукта	6	4	3		2. Необходимо продать ровно 5 штук продукта Б, чтобы удовлетворить требования постоянного покупателя

2. Нефтеперерабатывающий завод получает 4 полуфабриката:
400 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекинг - бензина. 350 тыс. л бензина прямой перегонки и 100 тыс. л изопентона. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуются три сорта авиационного бензина: бензин А - 2:3:5:2, бензин В - 3:1:2:1 и бензин С - 2:2:1:3. Стоимость 1 тыс. л

указанных сортов бензина характеризуется числами: 1200 руб., 1000 руб., 1500 руб. Определить план смешивания компонентов, при котором будет достигнута максимальная стоимость всей продукции.

3. Из 4 видов основных материалов (медь, цинк, свинец, никель) составляют 3 вида сплавов латуни: обычный, специальный и для художественных изделий. Цены на 1 ед. веса меди, цинка, свинца и никеля составляют 8 руб., 6 руб., 4 руб., 10 руб., а на 1 ед. веса сплава соответственно 20 руб., 30 руб., 40 рублей. Известно, что сплав для художественных изделий должен содержать не менее 6% никеля, не менее 50% меди и не более 30% свинца, специальный – не менее 4% никеля, не менее 70% меди, не менее 10% цинка и не более 20% свинца. В обычный сплав компоненты могут входить баз ограничений. Кроме того, известно, что производственная мощность предприятия позволяет выпускать (за определенный срок) не более 400 ед. веса обычного сплава, не более 700 ед. веса специального сплава и не более 100 ед. веса декоративного сплава.

Найти производственный план, дающий максимальную прибыль предприятию.

4. В состав рациона кормления входят 3 продукта: сено, силос и концентраты, содержащие следующие питательные вещества: белок, кальций и витамины. Содержание питательных веществ в граммах в 1 кг соответствующего продукта питания и минимально необходимые нормы их потребления заданы табл. 7.

Таблица 7

Продукты	Питательные вещества		
	белок	кальций	витамины
1. Сено	50	6	2
2. Силос	20	4	1
3. Концентраты	180	3	1
Норма потребления	2000	120	40

Определить оптимальный режим кормления из условия минимальной стоимости, если цена 1 кг продукта питания соответственно составляет: для сена - 30 коп., для силоса - 20 коп. и для концентратов -50 коп.

5. Фирме требуется уголь с содержанием фосфора не более 0,03% и с примесью золы не более 3,25%. Доступны три сорта угля по следующим ценам за одну тонну (табл. 8).

Таблица 8

Сорт угля	Содержание фосфора, %	Содержание золы, %	Цена, долл.
A	0,06	2	30
B	0,04	4	30
C	0,02	3	45

Как их следует смешать, чтобы удовлетворить ограничениям на применение и минимизировать цену?

6. Мебельная фабрика выпускает столы, стулья, кресла и книжные шкафы. При изготовлении этих товаров используется два различных типа досок, причем фабрика имеет в наличии 1500 м досок I типа и 1000 м досок II типа. Кроме того, заданы трудовые ресурсы в количестве 800 чел.-ч. Задана матрица нормативов затрат каждого из видов ресурсов на изготовление 1 ед. изделия и прибыль на 1 ед. изделия (табл. 9).

Таблица 9

Ресурсы	Затраты на 1 ед. изделия			
	столы	стулья	кресла	книжные шкафы
1. Доски I типа, м	5	1	9	12
2. Доски II типа, м	2	3	4	1
3. Трудовые ресурсы чел.-ч	3	2	5	10
Прибыль, руб./шт.	12	5	15	10

Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий прибыль при дополнительных условиях, накладываемых на ассортимент: столов не менее 40, стульев - не менее 130, кресел - не менее 30, книжных шкафов - не более 10.

7. Урожайность трех культур: пшеницы, гречихи и картофеля соответствует 20, 10 и 100 ц с гектара. При этом затраты на их возделывание составляют 0,5; 1 и 5 чел.-дней труда механизаторов и 0,5; 0,5 и 20 чел.- дней ручного труда (в расчете на 1 га). Производственные ресурсы составляют: 6000 га пашни, 5000 чел.-дней труда механизаторов, 9000 чел.-дней ручного труда. Найти площади посевов пшеницы, гречихи и картофеля, максимизирующих прибыль, если реализация 1 ц продукции приносит прибыль соответственно 4, 10 и 3 ден. ед.

8. Предприятие может выпускать продукцию по трем технологически отработанным способам производства. При этом за 1 час по I способу производства оно выпускает 20 ед. продукции, по II- 25 ед. и по III - 30 ед. продукции. Количество производственных факторов, расходуемых за 1 час при различных способах производства, и располагаемые ресурсы этих факторов представлены в табл. 10.

Таблица 10

Способ производства	Факторы					
	Сырье	Стенки	Рабочая сила	Энергия	Транспорт	Прочие расходы
1	2	3	1	2	1	4
2	1	4	3	1	0	2
3	3	2	4	3	1	1
Располагаемые ресурсы факторов	60	80	70	50	40	50

Спланировать работу предприятия из условия получения максимума продукции, если известно, что общее время работы предприятия составляет 24 ч.

9. Из листов материала размером 5x10 м можно выкроить 600 штук заготовок типа А (3 х 5 м) и 400 штук типа В (2 х 3 м), израсходовав при этом возможно меньше материала. Допустимы следующие способы раскроя (рис. 17).

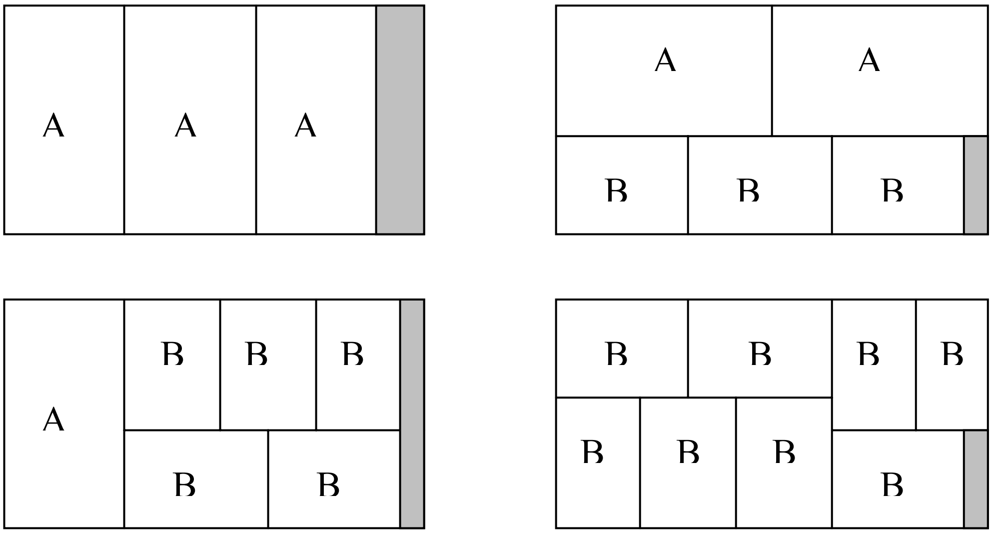

Рис. 17. Способы раскроя листов

Необходимо найти, какое количество листов нужно раскраивать каждым способом, чтобы получить требуемое количество заготовок, израсходовав наименьшее число листов материала.

10. Склад вместимостью в 100 ед. сезонного продукта содержит к началу планируемого периода 30 единиц. Определить, сколько требуется покупать и продавать в течение каждого из рассматриваемых 4 кварталов для получения максимума прибыли, если цена приобретенной единицы к концу квартала составляет 50, 70, 40. 90, а цена проданной единицы в точение квартала соответственно 100, 80, 50, 100 руб.

11. Ткань трех артикулов производится на ткацких станках двух типов с различной производительностью. Для изготовления ткани используется пряжа и красителя. В следующей таблице указаны мощности станков в тысячах станко- часов, ресурсы пряжи и красителей в тоннах, производительности станков по каждому виду пряжи в метрах на час, нормы расхода пряжи и краски в килограммах на 1 тонну и цене 1 м ткани (табл. 11).

Таблица 11

Типы ресурсов	Объем ресурсов	Производительность и нормы расхода по типу ткани		
		1	2	3
1. Станки I типа	30	20	10	25
2. Станки П типа	45	8	20	10
3. Пряжа	30	120	180	210
4. Красители	1	10	5	8
Цена, руб.		150	150	200

Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий прибыль.

12. Имеется трехотраслевая балансовая модель с матрицей коэффициентов затрат $A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$,

где – a_{ij} -затраты продукции i-й отрасли на производство единицы продукции j-й отрасли.

Производственные мощности отраслей ограничивают возможности ее валового выпуска числами 300, 200, 500. Определить оптимальный валовой выпуск всех отраслей, максимизирующий стоимость суммарного конечного продукта, если задан вектор цен на конечный продукт $C = (2, 5, 1)$ и ограничения на ассортимент $x_1 : x_3 = 2 : 1$, $x_2 \leq 100$.

13. Фирма производит три вида продукции (А, В, С), для выпуска каждого требуется определенное время обработки на всех четырех устройствах I, II, III, IV (табл. 12).

Таблица 12

Вид продукции	Время обработки, ч				Прибыль, долл.
	I	II	III	IV	
A	1	3	1	2	3
B	6	1	3	3	6
C	3	3	2	4	4

Пусть время работы на устройствах соответственно 84, 42, 21 и 42 часа. Определить, какую продукцию, и в каких количествах следует производить для максимизации прибыли. (Рынок сбыта не ограничен.)

14.Фирма занимается составлением диеты, содержащей по крайней мере 20 единиц белков, 30 единиц углеводов, 10 единиц жиров и 40 единиц витаминов. Как дешевле всего достичь этого при указанных в таблице ценах на 1 кг (или 1 л) пяти имеющихся продуктов (табл. 13)?

Таблица 13

	Хлеб	Соя	Сушеная рыба	Фрукты	Молоко
Белки	2	12	10	1	2
Углеводы	12	0	0	4	3
Жиры	1	8	3	0	4
Витамины	2	2	4	6	2
Цена	12	36	32	18	10

15. Фирма выпускает два набора удобрений для газонов: обычный и улучшенный. В обычный набор входят 3 фунта азотных, 4 фунта фосфорных и один фунт калийных удобрений, а в улучшенный- 2 фунта азотных, 6 фунтов фосфорных и 2 фунта калийных удобрений. Известно, что для некоторого газона требуется по меньшей мере 10 фунтов азотных, 20 фунтов фосфорных и 7 фунтов калийных удобрений. Обычный набор стоит 3 долл., а улучшенный- 4 долл. Сколько и каких наборов удобрений надо купить, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость?

16. В контейнер упакованы комплектующие изделия трех типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 руб. и 12 кг для первого типа, 500 руб. и 16 кг для второго типа, 600 руб. и 15 кг для третьего типа. Общий вес комплектующих равен 326 кг. Определить максимальную и минимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий.

17. Фирма рекламирует свою продукцию с использованием четырех средств: телевизора, радио, газет и афиш. Из опыта известно, что эти средства приводят к увеличению прибыли соответственно на 10, 3, 7 и 4 долл. В расчете на $1, затраченный на рекламу. Определить оптимальное распределение рекламного бюджета если оно подчинено следующим ограничениям: а) полный бюджет не должен превосходить $500000; б) следует расходовать не более 40% бюджета на телевидение и не более 20% бюджета на афиши; в) вследствие привлекательности для подростков радио на него следует расходовать по крайней мере половину того, что планируется на телевидение.

18. Чтобы при откорме животных весом 30- 40 кг получить средний привес 300 – 400 г, по нормам в дневном рационе должны содержаться питательные вещества в следующем количестве: кормовых единиц – не менее 1,6 кг; перевариваемого протеина – не менее 200 г, каротина – не менее 10 мг. При откорме используют ячмень, бобы и сенную муку. Содержание питательных веществ в 1 кг этих кормов и стоимость 1 кг корма приведены в табл. 14.

Таблица 14

Наименование питательного вещества	Количество ед. питательных веществ в 1 кг корма		
	ячмень	бобы	сенная мука
Кормовые единицы, кг	1,2	1,4	0,8
Перевариваемый протеин, г	80	280	240
Каротин, мг	5	5	100
Цена 1 кг корма (руб)	3	4	5

Составить дневной рацион, удовлетворяющий данной последовательности при минимальной стоимости.

19. Имеется две почвенно-климатические зоны, площадь которых соответственно равна 0,8 и 0,6 млн. га. Определить размеры посевных площадей озимых и яровых культур, необходимые для достижения максимального выхода продукции в стоимостном выражении. Урожайность культур по зонам и стоимость 1 ц зерна приведены в табл. 15

Таблица 15

Наименование	Урожайность, ц/га		Стоимость 1 ц (в руб)
	I зона	II зона	
Озимые	20	25	80
Яровые	25	20	70

Необходимо произвести озимых не менее 20 млн. ц и яровых не менее 6 млн. ц.

20. Для выращивания некоторой культуры применяются 3 вида удобрений - фосфорные, азотные и калийные. Вся посевная площадь разбита на три почвенно - климатические зоны. Составить такой план распределения удобрений между посевными площадями, который обеспечивал бы максимальный суммарный прирост урожайности культуры. Условия задачи приведены в табл. 16.

Таблица 16

Зоны	Посевная площадь, га	Затраты удобрений на 1 га (в ц)			Прирост урожайности на 1 га (в ц)
		фосфорные	азотные	калийные	
I	100 000	2	1	1	12
II	150 000	1	2	5/4	14
III	200 000	1	1/2	0	10
Имеющиеся удобрения (в ц)		400 000	300 000	100 000	-

21. На рынок доставляется картофель из трех хозяйств по цене соответственно 1,2, 1 и 0,8 руб. за 1 кг. На погрузку 1 т картофеля в хозяйствах соответственно затрачивается 1, 6, 5 мин. Для своевременной доставки картофеля необходимо, чтобы на погрузку 12 т картофеля затрачивалось не более 20 мин. Из каких хозяйств и в каком количестве надо доставить картофель, чтобы его стоимость была минимальной, если хозяйства могут выделить для продажи соответственно 10, 8 и 6 т картофеля?

22. Три шахты должны поставлять заводу коксующийся уголь. Выход концентрата должен быть не менее 3500 т.сут. Все данные о количестве и качестве угля, о затратах на добычу с учетом доставки на завод и о пропускной способности дорог приведены в табл. 17.

Таблица 17

№ шахты	Суточная добыча, т	Зольность, %	Содержание серы, %	Выход концентрата, %	Пропускная способность дорог, т/сут.	Затраты на добычу и доставку 1 т угля, руб
1	2200	14	2,0	75	2400	14
2	2500	20	0,8	60	2400	10
3	1500	16	1, 2	75	1200	12
Заказ завода		≤17	≤1,4	3500	-	min

Какое количество угля необходимо доставлять с каждой шахты, чтобы общие затраты по добыче и доставке были минимальны.

23. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 30 тыс. ден. ед. и помещение площадью в 45 м^2. Участок может быть оснащен машинами трех типов, стоимостью соответственно 6, 3 и 2 тыс. ден. ед., занимающих площадь 9, 4 и 3 м^2, производительностью 8, 4 и 3 тыс. ед. Найти оптимальный план приобретения машин, обеспечивающий новому производственному участку максимальную производительность.

24. Для грузовых перевозок создается автоколонна. На приобретение автомашин выделено 600 тыс. ден. ед. Можно заказать машины трех марок – А, Б и В, характеризующиеся данными, приведенными в табл. 18.

Таблица 18

Марка автомашины	Стоимость машины, тыс. ден. ед.	Количество водителей, обслуживающих машину за смену	Число рабочих смен в сутки	Производительность машины за смену, т/км
А	10	1	3	2100
Б	20	2	3	3600
В	23	2	3	3780

Количество автомашин не должно превышать 30, а общее число водителей в автоколонне должно быть не более 144 человек. Сколько автомашин каждой марки следует заказать, чтобы автоколонна имела максимально возможную производительность (т/км) в расчете на одни сутки? Считать, что каждая машина будет использоваться в течение всех трех смен, а водители будут работать по одной смене в сутки.

25. Продукцией гормолзавода являются молоко, кефир и сметана, расфасованные в пакеты. На производство 1 т молока, кефира и сметаны требуется соответственно 1010, 1010 и 9450 кг молока. При этом затраты рабочего времени при разливе 1 т молока и кефира составляют 0,18 и 0,19 машино-ч. На расфасовке 1 т сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 часа. Всего для производства цельномолочной продукции завод может использовать 136000 кг молока. Основное оборудование может быть занято в течение 21,4 машино-ч, а автоматы по расфасовке сметаны - в течение 16,25 ч. Прибыль от реализации 1 т молока, кефира и сметаны соответственно равна 3000, 2200 и 13600 руб. Завод должен ежедневно производить не менее 100 т расфасованного молока. На производство другой продукции не имеется никаких ограничений.

Требуется определить, какую продукцию и в каком количестве следует ежедневно изготовлять заводу, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной.

Лабораторная работа №3

Решение транспортной задачи

Задание. Для заданной матрицы издержек C, вектора- столбца запасов B в пунктах отправления и вектора- строки потребностей A в пунктах назначения решить транспортную задачу и составить отчет по следующим пунктам:

- осуществить математическую запись транспортной задачи;
- решить задачу с помощью надстройки Excel "Поиск решения";
- изменить данные для получения открытой задачи и решить ее.

Варианты заданий приведены в табл. 19.

Таблица 19

№ вар	Исходные данные	№ вар	Исходные данные
1	$C=\begin{pmatrix}7&15&4&6&5\\1&8&6&5&3\\6&13&8&7&4\end{pmatrix}\begin{matrix}180\\350\\20\end{matrix}$ 110 90 120 80 150	6	$C=\begin{pmatrix}2&3&4&3\\5&3&1&2\\2&1&4&2\end{pmatrix}\begin{matrix}90\\60\\150\end{matrix}$ 120 40 60 80
2	$C=\begin{pmatrix}1&2&4&1\\2&3&1&5\\3&2&4&4\end{pmatrix}\begin{matrix}50\\30\\10\end{matrix}$ 30 30 10 20	7	$C=\begin{pmatrix}4&5&2&8&6\\3&1&9&7&3\\9&6&7&2&1\end{pmatrix}\begin{matrix}115\\175\\130\end{matrix}$ 70 220 40 30 60
3	$C=\begin{pmatrix}4&5&3&7\\7&6&2&9\\1&3&9&8\\2&4&5&6\end{pmatrix}\begin{matrix}280\\175\\125\\130\end{matrix}$ 90 180 310 130	8	$C=\begin{pmatrix}3&9&4&5\\1&8&5&3\\7&2&1&4\\2&4&10&6\end{pmatrix}\begin{matrix}40\\10\\30\\25\end{matrix}$ 50 10 35 10
4	$C=\begin{pmatrix}2&3&4&2&4\\8&4&1&4&1\\9&7&3&7&2\end{pmatrix}\begin{matrix}140\\180\\160\end{matrix}$ 60 70 120 130 100	9	$C=\begin{pmatrix}2&4&7&9\\5&1&8&12\\11&6&4&3\end{pmatrix}\begin{matrix}200\\270\\130\end{matrix}$ 120 80 240 160
5	$C=\begin{pmatrix}2&7&7&6\\1&1&1&2\\5&5&3&1\\2&8&1&4\\3&2&1&5\end{pmatrix}\begin{matrix}20\\50\\10\\20\\15\end{matrix}$ 40 35 20 20	10	$C=\begin{pmatrix}5&1&7&6\\1&5&8&1\\5&6&3&3\\2&5&1&4\\3&7&9&1\end{pmatrix}\begin{matrix}30\\40\\10\\20\\10\end{matrix}$ 20 40 30 20

11	$C=\begin{pmatrix}7&9&1&5\\2&7&5&6\\3&5&10&8\\3&7&4&5\end{pmatrix}\begin{matrix}20\\30\\50\\30\end{matrix}$ 40 30 20 40	18	$C=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&5&3\\6&4&2\\7&8&5\end{pmatrix}\begin{matrix}320\\280\\270\\350\end{matrix}$ 450 370 400
12	$C=\begin{pmatrix}1&7&9&5\\4&2&6&8\\3&8&1&2\end{pmatrix}\begin{matrix}120\\280\\160\end{matrix}$ 130 220 60 70	19	$C=\begin{pmatrix}6&7&3&2\\5&1&4&3\\3&2&6&2\end{pmatrix}\begin{matrix}150\\70\\140\end{matrix}$ 50 50 100 160
13	$C=\begin{pmatrix}18&2&3&12\\3&4&8&7\\4&5&6&12\\7&1&5&6\end{pmatrix}\begin{matrix}180\\160\\140\\220\end{matrix}$ 150 250 120 180	20	$C=\begin{pmatrix}1&3&4&5\\5&2&10&3\\3&2&1&4\\6&4&2&6\end{pmatrix}\begin{matrix}20\\30\\55\\20\end{matrix}$ 30 20 60 15
14	$C=\begin{pmatrix}5&4&3&4\\3&2&5&5\\1&6&3&2\end{pmatrix}\begin{matrix}140\\120\\60\end{matrix}$ 90 80 60 90	21	$C=\begin{pmatrix}4&2&3&1\\6&3&5&6\\3&2&6&3\end{pmatrix}\begin{matrix}70\\130\\60\end{matrix}$ 80 50 40 70
15	$C=\begin{pmatrix}6&1&3&1\\3&4&5&8\\5&9&3&2\\2&4&8&4\\3&2&1&5\end{pmatrix}\begin{matrix}20\\40\\20\\20\\15\end{matrix}$ 50 30 15 20	22	$C=\begin{pmatrix}7&1&3&2\\8&4&5&8\\5&2&3&7\\5&5&8&4\\1&9&7&5\end{pmatrix}\begin{matrix}40\\20\\10\\20\\40\end{matrix}$ 30 40 50 10
16	$C=\begin{pmatrix}2&4&1&6&7\\3&3&5&4&2\\8&9&6&3&4\end{pmatrix}\begin{matrix}120\\110\\130\end{matrix}$ 80 60 70 100 50	23	$C=\begin{pmatrix}1&4&7&3\\5&6&8&9\\7&2&4&8\end{pmatrix}\begin{matrix}510\\90\\120\end{matrix}$ 270 140 200 110
17	$C=\begin{pmatrix}6&3&4&5\\5&2&3&3\\3&4&2&4\\5&6&2&7\end{pmatrix}\begin{matrix}20\\70\\50\\30\end{matrix}$ 30 40 80 20	24	$C=\begin{pmatrix}5&9&4&5\\1&5&5&6\\2&2&10&4\\3&7&2&6\end{pmatrix}\begin{matrix}30\\25\\30\\40\end{matrix}$ 20 50 20 35

Лабораторная работа №4

Решение задачи нелинейного программирования

Задание. Для заданной математической постановки задачи НП (целевой функции $f(\mathbf{x})$ и ограничений- равенств) выполнить следующие действия:

- найти все условные экстремумы функций методом множителей Лагранжа и выбрать среди них глобальный минимум (максимум);
- проверить результаты решения в табличном процессоре Excel;
- составить отчет.

Варианты заданий приведены в табл. 20.

Таблица 20

№ вар-та	Постановка задачи	№ вар-та	Постановка задачи
1	$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 12 \end{cases}$	9	$f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 x_3$ $\begin{cases} 2x_1 x_2 + x_2 x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 = 8 \end{cases}$
2	$f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 + x_2 x_3$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$	10	$f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2 + 4x_2 x_3$ $\begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 = 19 \\ x_1 + 2x_2 x_3 = 11 \end{cases}$
3	$f(\mathbf{x}) = x_1 - 2x_2 + 2x_3$ $\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1$	11	$f(\mathbf{x}) = x_1^2 x_2^3 x_3^4$ $\{x_1 + x_2 + x_3 = 18$
4	$f(\mathbf{x}) = 2x_1 x_2 + x_2 x_3 + 2x_1 x_3$ $\{x_1 x_2 x_3 = 1$	12	$f(\mathbf{x}) = x_1 x_2^2 x_3^3$ $\{x_1 + x_2 + x_3 = 6$
5	$f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 + x_2 x_3$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$	13	$f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 x_3$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = 8 \end{cases}$
6	$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ $\{x_1 - x_2 = 5$	14	$f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 4x_1 x_2 + 5x_2^2$ $\{x_1 + x_2 = 4$
7	$f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 = 12 \end{cases}$	15	$f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2 + 4x_2 x_3$ $\begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 = 15 \\ x_1 + x_2 x_3 = 11 \end{cases}$
8	$f(\mathbf{x}) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2$ $\{x_1 + x_2 = 180$	16	$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ $\{3x_1^2 + 4x_1 x_2 + 6x_2 = 140$

Продолжение табл. 20

№ вар-та	Постановка задачи	№ вар-та	Постановка задачи
17	$f(\mathbf{x}) = 3x_1x_2^2$ $\{3x_1x_2 + 2x_2^2 = 10$	22	$f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 + x_2 - x_1$ $\{x_1 + x_2 - 1 = 0$
18	$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2$ $\{x_1x_2 - 1 = 0$	23	$f(\mathbf{x}) = x_1x_2 - x_1 - x_2^2$ $\{x_1 + x_2 - 1 = 0$
19	$f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - x_1x_2^2$ $\{x_1 - 3x_2 + 1 = 0$	24	$f(\mathbf{x}) = x_1 - 4x_2 + 2x_3$ $\{x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^3 = 1$
20	$f(\mathbf{x}) = x_1x_2x_3$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_2 = 5 \\ x_1x_2 + 3x_2x_3 + x_1x_3 = 8 \end{cases}$	25	$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$
21	$f(\mathbf{x}) = 2x_1^2x_2^3x_3^4$ $\{2x_1 + x_2 + x_3 = 10$		

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах.- М.: Высш. шк., 1986.
2. Ашманов С.А. Линейное программирование.- М.: Наука, 1981.
3. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс -М.: Радио и связь, 1988.
4. Банди Б. Основы линейного программирования.- М.: Радио и связь, 1989.
5. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.- М.: Наука, 1986.
6. Гарнаев А.Ю. Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах.- СПб.: BHV - Санкт- Петербург, 2000.
7. Карманов В. Г. Математическое программирование. -М.: Наука, 1975.
8. Курицкий Б. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0.- СПб.: BHV-Санкт-Петербург, 1997 г.
9. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. – М.:Высш.шк., 1976.
10. Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации. - М.: Наука, 1978.
11. Муртаф Ф. Современное линейное программирование. -М.: Мир, 1985.
12. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. -М.: Мир, 1974.
13. Юдин Л. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. -М.: Наука, 1968.

Составитель

Шипилов Сергей Александрович

МЕТОДЫ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Рекомендации к выполнению лабораторных и практических работ по дисциплине "Методы оптимизации"

Специальности: "Автоматизированные системы обработки информации и управления" (220200), "Информационные системы в экономике" (071900)

Издание второе, переработанное

Редактор Т.И. Головко

Изд. лиц. серия ЛР № 020464 от 19.06.1997 г. Лицензия выдана КемГУ (650043, г. Кемерово, ул. Красная, 6)

Подписано в печать 19.12.2001 г. Формат бумаги 60х90 1/16. Бумага писчая. Печать на ризографе GR 3750. Усл. печ. л. 2,8. Уч.- изд. 3,1
Тираж 100 экз. Заказ

Новокузнецкий филиал- институт Кемеровского государственного университета. 654041, г. Новокузнецк, ул. Циолковского, 15 а. Издательский центр НФИ КемГУ

Цена договорная