Министерство образования Российской Федерации

Новосибирский государственный технический университет

51
И889

Методы оптимизации, исследование операций и теория игр

Методические указания
к лабораторным работам для студентов III-IV курса ФПМИ
(направление 510200 – “Прикладная математика и информатика”
дневного отделения)

Новосибирск,
2002

УДК 519.85

Методические указания являются руководством при выполнении лабораторных занятий, проводимых по курсам "Методы оптимизации" и "Теория игр и исследование операций" со студентами (направление 510200 – “Прикладная математика”) в терминальном классе. Они охватывают ряд разделов математического программирования, теории игр, исследования операций и могут быть полезны студентам других специальностей.

Составители: д-р техн. наук, проф. Б.Ю. Лемешко,
канд. техн. наук С.Н. Постовалов,
канд. техн. наук В.С. Тимофеев

Рецензент: канд. техн. наук Д.В. Лисицин

Работа подготовлена на кафедрах прикладной математики и теории рынка

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4
Лабораторная работа № 1. *Методы одномерного поиска* 5
Лабораторная работа № 2. *Методы спуска (0-го, 1-го и 2-го порядка и переменной метрики)* 10
Лабораторная работа № 3. *Метод штрафных функций* 13
Лабораторная работа № 4. *Статистические методы поиска* 16
Лабораторная работа № 5. *Решение транспортных задач линейного программирования* 17
Лабораторная работа № 6. *Симплексные методы решения задач линейного программирования* 20
Лабораторная работа № 7. *Решение задач квадратичного программирования* 24
Лабораторная работа № 8. *Многокритериальные задачи линейного и нелинейного программирования* 26
Лабораторная работа № 9. *Принятие решений в условиях риска* 31
Лабораторная работа № 10. *Принятие решений в условиях неопределенности* 34
Лабораторная работа № 11. *Решение матричных игр* 37
Лабораторная работа № 12. *Методы целочисленного линейного программирования* 40
Литература 42

Введение

Исследование операций включает в себя чрезвычайно широкий спектр методов и задач, связанных с необходимостью принятия наиболее оптимального решения. Каждое исследование сопровождается последовательностью выполнения таких этапов, как постановка задачи, построение математической модели, нахождение или разработка метода решения, проверка и корректировка модели, реализация найденного решения на практике.

Лабораторные работы связаны с методами поиска оптимальных решений и охватывают ряд разделов математического программирования. Это одномерные методы поиска, методы минимизации функций многих переменных, метод штрафных функций, статистические методы поиска, решение задач линейного программирования, решение многокритериальных задач, принятие решений в условиях риска и неопределённости, решение матричных игр.

Ряд предлагаемых задач имеют экономическое содержание: оптимизация плана производства; оптимальное инвестирование денежных средств в ценные бумаги; оптимальное поведение контрагентов на рынке. Они охватывают различные разделы экономической теории. Решая такие задачи, студенты получат определенный опыт применения математических методов и алгоритмов на практике.

При выполнении лабораторных работ предусмотрены как использование фрагментов готового программного обеспечения, так и самостоятельная программная реализация конкретных методов и их анализ, что позволяет глубже понять отдельные аспекты алгоритмов. Необходимое программное обеспечение находится на www-сайте по адресу http://ami.nstu.ru/~post/.

В зависимости от темы лабораторной работы, доступности соответствующего материала в литературных источниках или полноты его изложения в курсе лекций, в тексте указаний могут присутствовать или отсутствовать сведения об алгоритмах используемых методов. В последнем случае предполагается, что студент может ознакомиться с необходимыми сведениями в литературном источнике, ссылка на который предлагается, или воспользоваться конспектом лекций.

При подготовке отчёта по каждой лабораторной работе основной упор должен быть сделан не на объём проделанной работы и обилие полученных результатов, а на анализ эффективности методов, сравнение их характеристик, определение области предпочтительного использования, на наглядность результатов, подтверждающих выводы по работе, что особенно важно при решении экономических задач. Отчет может быть представлен в электронном виде, но должен содержать всю необходимую информацию.

Лабораторная работа № 1

Методы одномерного поиска

Цель работы

Ознакомиться с методами одномерного поиска [7,13], используемыми в многомерных методах минимизации функций n переменных. Сравнить различные алгоритмы по эффективности на тестовых примерах.

Методические указания

1. *Общая схема методов поиска минимума на отрезке*

Пусть функция $f(x)$ унимодальна на отрезке $[a_0, b_0]$. Необходимо найти точку минимума функции на этом отрезке с заданной точностью ε. Все методы одномерного поиска базируются на последовательном уменьшении интервала, содержащего точку минимума.

Возьмем внутри отрезка $[a_0, b_0]$ две точки x_1 и x_2: $a_0 < x_1 < x_2 < b_0$, и вычислим значения функции в этих точках. Из свойства унимодальности функции можно сделать вывод о том, что минимум расположен либо на отрезке $[a_0, x_2]$, либо на отрезке $[x_1, b_0]$. Действительно, если $f(x_1) < f(x_2)$, то минимум не может находиться на отрезке $[x_2, b_0]$, а если $f(x_1) > f(x_2)$, то минимум не может находиться на отрезке $[a_0, x_1]$. Если же $f(x_1) = f(x_2)$, то минимум находится на интервале $[x_1, x_2]$.

Алгоритм заканчивается, когда длина интервала, содержащего минимум, становится меньше ε. Различные методы одномерного поиска отличаются выбором точек x_1, x_2. Об эффективности алгоритмов можно судить по числу вычислений функции, необходимому для достижения заданной точности.

2. *Метод дихотомии* (деления отрезка пополам)

Точки x_1, x_2 выбираются на расстоянии $\delta < \varepsilon / 2$ от середины отрезка:

$$\begin{aligned} x_1 &= (a_i + b_i)/2 - \delta, \\ x_2 &= (a_i + b_i)/2 + \delta. \end{aligned} \tag{1}$$

За одну итерацию интервал неопределенности уменьшается примерно в два раза (рис. 1). За n итераций длина интервала будет примерно равна $\dfrac{(b_0 - a_0)}{2^n}$. Для достижения точности ε потребуется $n \geq \dfrac{\ln\left((b_0 - a_0)/\varepsilon\right)}{\ln 2}$

итераций. На каждой итерации минимизируемая функция вычисляется дважды.

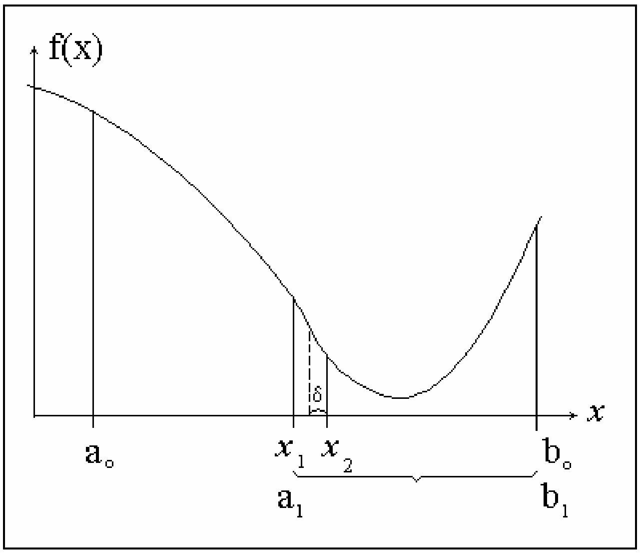

Рис. 1. Метод дихотомии

2. *Метод золотого сечения*

Точки x_1, x_2 находятся симметрично относительно середины отрезка $[a_0, b_0]$ и делят его в пропорции золотого сечения, когда длина всего отрезка относится к длине большей его части также, как длина большей части относится к длине меньшей части:

$$\frac{b_0 - a_0}{b_0 - x_1} = \frac{b_0 - x_1}{x_1 - a_0} \text{ и } \frac{b_0 - a_0}{x_2 - a_0} = \frac{x_2 - a_0}{b_0 - x_2}.$$

Отсюда

$$x_1 = a_i + \frac{(3-\sqrt{5})}{2}(b_i - a_i) \approx a_i + 0.381966011 \times (b_i - a_i),$$

$$x_2 = a_i + \frac{(\sqrt{5}-2)}{2}(b_i - a_i) \approx a_i + 0.618003399 \times (b_i - a_i) = \tag{2}$$

$$= b_i - 0.381966011 \times (b_i - a_i).$$

За одну итерацию интервал неопределенности уменьшается в $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618...$ раз, но на следующей итерации мы будем вычислять функцию только один раз, так как по свойству золотого сечения $\frac{x_2 - x_1}{b - x_1} = 0.381...$ и $\frac{b - x_2}{b - x_1} = 0.618....$ (рис. 2). Для достижения точности ε потребуется $n \geq \dfrac{\ln((b_0 - a_0)/\varepsilon)}{\ln \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ итераций.

Неточное задание величины $\sqrt{5}$ на ЭВМ уже при достаточно небольшом количестве итераций может приводить к погрешностям и потере точки минимума, так как она выпадает из интервала неопределенности. Поэтому, вообще говоря, при реализации алгоритма возможность такой ситуации должна быть предусмотрена.

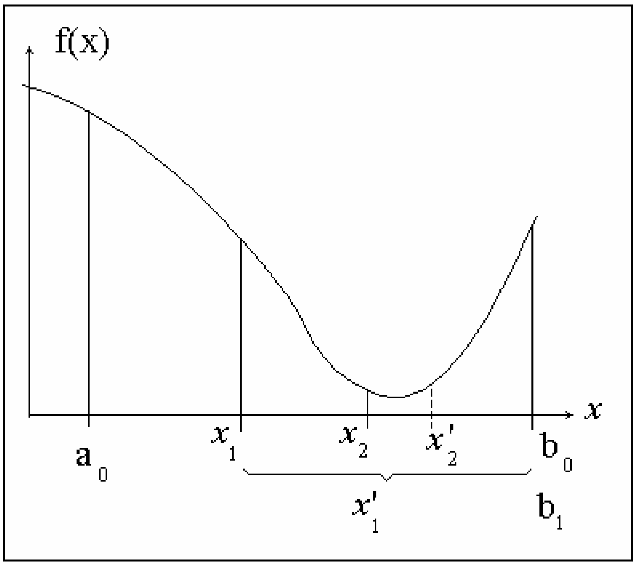

Рис. 2. Метод золотого сечения

3. *Метод Фибоначчи*

Числа Фибоначчи определяются соотношениями:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ n = 1, 2, \ldots,\ F_1 = F_2.$$

С помощью индукции можно показать, что n-е число Фибоначчи представимо в виде (*формула Бинэ*):

$$F_n = \left[\left((1+\sqrt{5})/2\right)^n - \left((1-\sqrt{5})/2\right)^n\right]/\sqrt{5},\ n = 1, 2, \ldots$$

Из этой формулы видно, что при больших n: $F_n \approx \left((1+\sqrt{5})/2\right)^n/\sqrt{5}$, так что числа Фибоначчи с увеличением n растут очень быстро.

На начальном интервале вычисляют точки

$$x_1 = a_0 + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b_0 - a_0),$$
$$x_2 = a_0 + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}(b_0 - a_0), \tag{3}$$

где n выбирается исходя из точности и начальной длины интервала (см. ниже соотношение (5)).

На k-м шаге метода будет получена тройка чисел $a_k, b_k, \overline{x_k}$, локализирующая минимум $f(x)$, такая, что

$$\Delta_k = b_k - a_k = (b_0 - a_0)\frac{F_{n-k+3}}{F_{n+2}}, 1 \le k \le n, a_1 = a_0, b_1 = b_0,$$

а точка $\overline{x_k}$, $a_k < \overline{x_k} < b_k$, с вычисленным значением

$$f(\overline{x_k}) = \min_{1\le i\le k} f(x_i),$$

совпадает с одной из точек

$$\begin{aligned} x_1 &= a_k + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+3}}(b_k - a_k) = a_k + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n+2}}(b_0 - a_0), \\ x_2 &= a_k + \frac{F_{n-k+2}}{F_{n-k+3}}(b_k - a_k) = a_k + \frac{F_{n-k+2}}{F_{n+2}}(b_0 - a_0), \end{aligned} \tag{4}$$

расположенных на отрезке $[a_k, b_k]$ симметрично относительно его середины (рис. 3). При $k = n$ процесс заканчивается. В этом случае длина отрезка

$$\Delta_n = b_n - a_n = (b_0 - a_0)/F_{n+2},$$

а точки

$$x_1 = a_n + \frac{F_1}{F_{n+2}}(b_0 - a_0),$$

$$x_2 = a_n + \frac{F_2}{F_{n+2}}(b_0 - a_0)$$

совпадают и делят отрезок пополам.

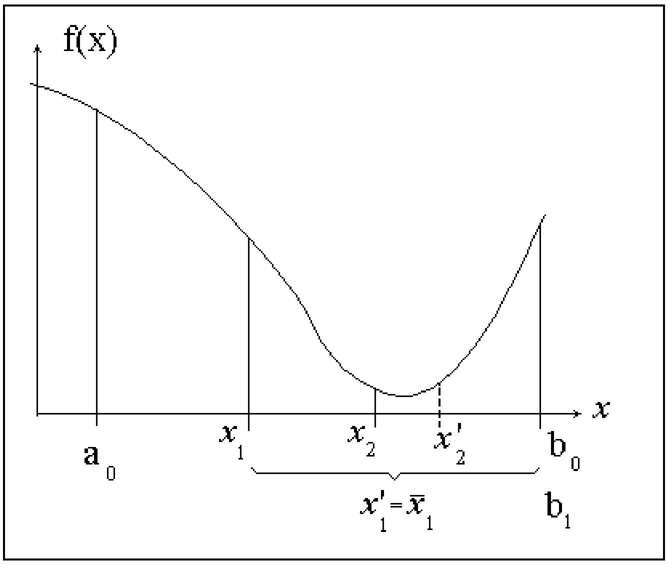

Рис. 3. Метод Фибоначчи

Следовательно

$$\frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{F_{n+2}} < \varepsilon .$$

Отсюда можно выбрать n из условия

$$\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} < F_{n+2} . \quad (5)$$

С ростом n, из-за того, что F_n / F_{n+2} – бесконечная десятичная дробь, происходит искажение метода. Поэтому на очередном шаге в качестве новой точки берут из (4) наиболее удалённую от $\overline{x_{k-1}}$ на предыдущем шаге.

4. *Поиск интервала, содержащего минимум функции*

В рассмотренных методах требуется знать начальный отрезок, содержащий точку минимума. Поиск отрезка на прямой заключатся в том, что возрастающие по величине шаги осуществляются до тех пор, пока не будет пройдена точка минимума функции, т.е. убывание функции сменится на возрастание.

Например, интервал может быть выделен с помощью следующего алгоритма. На первом шаге выбираем начальную точку x_0 и определяем направление убывания функции.

Шаг 1. Если $f(x_0) > f(x_0 + \delta)$, то полагаем: k=1, $x_1 = x_0 + \delta$, $h = \delta$. Иначе, если $f(x_0) > f(x_0 - \delta)$, то $x_1 = x_0 - \delta$, $h = -\delta$.

Шаг 2. Удваиваем h и вычисляем $x_{k+1} = x_k + h$.

Шаг 3. Если $f(x_k) > f(x_{k+1})$, то полагаем $k = k + 1$ и переходим к шагу 2. Иначе – поиск прекращаем, т.к. отрезок $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ содержит точку минимума.

5. *Поиск минимума функции* n *переменных в заданном направлении*

Пусть требуется найти минимум функции n переменных $f(\bar{x})$, где $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, в направлении вектора $\bar{s}$. Для этого нужно найти минимум функции $g(\lambda) = f(\bar{x} + \lambda \cdot \bar{s})$ рассмотренными выше методами, λ – величина шага в заданном направлении.

Порядок выполнения работы

1. Реализовать методы дихотомии, золотого сечения и Фибоначчи, исследовать их сходимость и провести сравнение по числу вычислений функции для достижения заданной точности. Построить график зависимости количества вычислений минимизируемой функции от логарифма задаваемой точности ε.

2. Реализовать алгоритм поиска интервала, содержащего минимум функции.

Варианты заданий

1. $f(x) = \sin(x),\ x \in [-\pi/2, \pi/2]$.
2. $f(x) = \cos(x),\ x \in [0, \pi]$.
3. $f(x) = (x-2)^2,\ x \in [-2, 20]$.
4. $f(x) = (x-15)^2 + 5,\ x \in [2, 200]$.
5. $f(x) = (x+5)^4,\ x \in [-10, 15]$.
6. $f(x) = \exp(x),\ x \in [0, 100]$.
7. $f(x) = x^2 + 2 * x - 4,\ x \in [-10, 20]$.
8. $f(x) = x^3 - x,\ x \in [0, 1]$.

Содержание отчета

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; задание; таблицы с результатами исследований по каждому методу, где должны быть отражены границы и длины интервалов на каждой итерации, соотношение длины интервала на $k-1$ итерации к длине интервала на k итерации; график зависимости количества вычислений целевой функции от логарифма задаваемой точности ε; выводы по всем пунктам задания.

Контрольные вопросы

1. Метод дихотомии.
2. Метод золотого сечения.
3. Метод Фибоначчи.
4. Метод квадратичной интерполяции (*метод парабол*)
5. Алгоритм поиска интервала, содержащего минимум функции.

Лабораторная работа № 2

Методы спуска (0-го, 1-го и 2-го порядка и переменной метрики)

Цель работы

Ознакомиться с методами поиска минимума функции n переменных в оптимизационных задачах без ограничений [1,10,13].

Методические указания

1. Общая схема методов спуска

Пусть дана функция $f(\bar{x})$, где $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, и задана начальная точка $\bar{x}_0$. Требуется найти минимум функции $f(\bar{x})$ с точностью ε_f – по функции, ε_i – по переменным x_i, где $i = 1,...,n$.

На k-м шаге ($k > 0$) определяем вектор $\bar{s}_k$, в направлении которого функция $f(\bar{x})$ уменьшается. В этом направлении делаем шаг величиной λ_k и получаем новую точку $\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k + \lambda_k \bar{s}^k$, в которой $f(\bar{x}^{k+1}) < f(\bar{x}^k)$. Поиск прекращаем как только $\left| f(\bar{x}^{k+1}) - f(\bar{x}^k) \right| < \varepsilon_f$ или для всех i верно $\left| \bar{x}_i^{k+1} - \bar{x}_i^k \right| < \varepsilon_i$.

Различные методы спуска отличаются выбором направления и величины шага. Как правило, для нахождения λ_k используется процедура одномерного поиска.

2. Методы 0-го порядка (прямые методы)

К методам нулевого порядка относятся методы, не использующие производные для выбора направления спуска: метод вращающихся координат; метод деформируемого многогранника; метод Хука и Дживса; метод Гаусса; метод Пауэлла.

3. Методы 1-го порядка

К методам первого порядка относятся методы, использующие производные первого порядка для выбора направления спуска: метод наискорейшего спуска; метод сопряженных градиентов в модификации Данилина-Пшеничного (Полака-Рибьера); метод сопряженных градиентов в модификации Флетчера-Ривса.

4. Методы 2-го порядка

К методам второго порядка относятся методы, использующие производные первого и второго порядка для выбора направления спуска: метод Ньютона и его модификации.

5. Методы переменной метрики

К методам переменной метрики относятся методы первого порядка, в которых при работе алгоритма на квадратичных функциях аппроксимируется матрица, обратная к матрице вторых частных производных. Как и методы сопряженных градиентов они имеют квадратичную за n шагов скорость сходимости. К ним относятся: метод Бройдена, метод Флетчера; метод Пирсона и др.

Порядок выполнения работы

1. С использованием программного обеспечения исследовать алгоритмы на заданной тестовой функции, осуществляя спуск из различных исходных точек. Исследовать сходимость алгоритма, фиксируя точность определения минимума, количество итераций метода и количество вычислений минимизируемой функции в зависимости от задаваемой точности поиска. Результатом выполнения данного пункта должны быть выводы об объёме вычислений в зависимости от задаваемой точности и начального приближения.
2. Построить траекторию спуска различных алгоритмов из одной и той же исходной точки с одинаковой точностью. В отчете наложить эту траекторию на рисунок с линиями уровня минимизируемой функции.
3. Реализовать по собственному выбору один из методов спуска, проанализировать его работу на квадратичной функции (линии равного уровня не должны быть окружностями) и функции Розенброка (см. первый вариант). Включить в реализуемый алгоритм собственную процедуру, реализующую одномерный поиск по направлению.

Варианты заданий

1. $f(\bar{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, метод Гаусса.
2. $f(\bar{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, метод Хука и Дживса.
3. $f(\bar{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + 100(1 - x_1)^2$, метод Пауэлла.
4. $f(\bar{x}) = 100(x_2 - x_1^3)^2 + (1 - x_1)^2$, метод деформируемого многогранника.
5. $f(\bar{x}) = (1.5 - x_1(1 - x_2))^2 + (2.25 - x_1(1 - x_2^2))^2 + (2.625 - x_1(1 - x_2^3))^2$, метод наискорейшего спуска.
6. $$f(\bar{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 90(x_4 - x_3^2) + (1 - x_3)^2 + 10.1(x_2 - 1)^2 + \\ + (x_4 - 1)^2 + 19.8(x_2 - 1)(x_4 - 1),$$
   метод Ньютона
7. $f(\bar{x}) = (x_1 + x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$, метод Пирсона.
8. $f(\bar{x}) = \left(x_1^2 + x_2 - 11\right)^2 + \left(x_1 + x_2^2 - 7\right)^2 + \left(x_2 - 2x_3\right)^4 + 10\left(x_1 - x_4\right)^4$, метод Бройдена.

Содержание отчета

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; задание; таблицы с результатами проведенных исследований, где должны быть отражены начальное приближение $\bar{x}_0$, задаваемая точность, количество итераций, число вычислений целевой функции, найденная точка и значение функции в ней, а также выводы о сходимости алгоритмов в зависимости от точности и начального приближения с указанием преимуществ и недостатков.

Контрольные вопросы

1. Метод Гаусса.
2. Метод Хука и Дживса.
3. Метод Розенброка (вращающихся координат).
4. Метод Пауэлла.
5. Метод деформируемого многогранника.
6. Метод наискорейшего спуска.
7. Метод сопряженных градиентов и его модификации.
8. Метод Ньютона и его модификации.
9. Методы переменной метрики.

Лабораторная работа № 3

Метод штрафных функций

Цель работы

Ознакомиться с методами штрафных функций при решении задач нелинейного программирования [7,13]. Изучить типы штрафных и барьерных функций, их особенности, способы и области применения, влияние штрафных функций на сходимость алгоритмов, зависимость точности решения задачи нелинейного программирования от величины коэффициента штрафа.

Методические указания

С помощью методов штрафных функций и барьеров (их еще называют *методы внешней и внутренней штрафной точки*) задача нелинейного программирования решается путём исследования *последовательности задач* без ограничений. Вследствие того, что методы штрафных функций и барьеров не оперируют ограничениями в явном виде, они оказываются эффективными в вычислительном отношении для задач нелинейного программирования.

Методы штрафных функций и барьеров аппроксимируют исходную задачу нелинейного программирования последовательностью связанных с ней задач без ограничений, каждая из которых может быть решена с помощью имеющихся алгоритмов оптимизации.

В **методе штрафных функций** исходную задачу

$$\min f(\bar{x})$$

при ограничениях

$$h_j(\bar{x}) = 0,\ j = \overline{1,m};$$

$$q_j(\bar{x}) \le 0,\ j = \overline{1,k},$$

сводят к задаче без ограничений

$$\min Q(x) = \min\left\{ f(\bar{x}) + r_0\left[\sum_{j=1}^{m} r_j \Phi_j(h_j(\bar{x})) + \sum_{l=1}^{k} r_l S_l(q_l(\bar{x}))\right]\right\}. \qquad (6)$$

где $\Phi(\cdot)$, $S(\cdot)$ – функции штрафа, которые накладываются при нарушении ограничений. Обычно функция штрафа выбирается такой, чтобы штраф был равен нулю, если ограничение выполняется, и больше нуля, если нарушено.

Барьерные функции отличаются от штрафных тем, что в допустимой области они всегда не равны нулю и, кроме того, резко возрастают, стремясь к бесконечности, при приближении к границе допустимой области. В отличие от штрафных барьерные функции требуют специальной адаптации алгоритмов оптимизации, так как при случайном нарушении ограничений в процессе поиска может произойти переполнение разрядной сетки.

Стратегия выбора коэффициентов штрафа. Эффективность применения метода штрафных функций существенно зависит от выбора функции штрафа и правильно подобранной стратегии корректировки коэффициентов штрафа r_j. Как правило, алгоритм подбора коэффициентов штрафа заключается в следующем. На начальном этапе фиксируем точку $\bar{x}_0$, а также начальные значения коэффициентов штрафа и находим минимум функции (6) в точке $\bar{x}_1$. Далее проверяем величину штрафа: если штраф больше заданной точности ε, то изменяем величину штрафа (для штрафных функций коэффициенты штрафа увеличиваются, а для барьерных функций – уменьшаются) и повторяем поиск из точки $\bar{x}_1$. Так продолжаем до тех пор, пока величина штрафа не станет меньше ε.

Порядок выполнения работы

1. Применяя методы поиска 0-го порядка на основании исходных текстов программ, реализующих соответствующие алгоритмы, построить программу для решения задачи нелинейного программирования с использованием барьерных и штрафных функций.
2. Исследовать сходимость метода штрафных функций в зависимости от выбора функций штрафа и стратегии выбора коэффициентов штрафа, осуществляя спуск из различных исходных точек. Исследовать сходимость, фиксируя точность определения минимума, количество итераций метода и степень нарушения ограничений в зависимости от задаваемой величины коэффициента штрафа.

Варианты заданий

1. $f(\bar{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, $x_1 - x_2 \le -1$.
2. $f(\bar{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, $x_2 \ge 2$.
3. $f(\bar{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, $\bar{x} \le \bar{0}$.
4. $f(\bar{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + 5(1 - x_1)^2$, $x_1 + x_2 \ge 5$.
5. $f(\bar{x}) = 10(x_2 - x_1^3)^2 + (1 - x_1)^2$, $x_1 - x_2 \le -1$.
6. $f(\bar{x}) = 50(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, $x_2 \ge 2$
7. $f(\bar{x}) = (x_1 - x_2)^2 + 100(x_1 + x_2 - 4)^2$, $-0.1x_1^2 + x_2 \le 0$;
   $q_2(x) = x_2 \le -2;$, $\bar{x} \le \bar{0}$.
8. $f(\bar{x}) = (3 - x_1)^2 + 100(x_2 + (x_1 - 2)^2 - 5)^2$, $q_1(\bar{x}) = 9(x_1 - 2)^2 + 25x_2^2 \ge 500$;
   $q_2(\bar{x}) = x_1 \le -10$; $q_3(\bar{x}) = x_2^{\,2} \ge 17$;

Содержание отчета

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; задание; таблицы с результатами проведенных исследований, где должны быть отражены начальное приближение $\bar{x}_0$, задаваемая точность, начальное значение коэффициента штрафа, количество итераций, число вычислений целевой функции, найденная точка и значение функции в ней, а также выводы об эффективности метода штрафных функций, рекомендации о выборе функций штрафа и стратегии выбора коэффициентов штрафа в зависимости от используемого метода оптимизации и вида задачи нелинейного программирования.

Контрольные вопросы

1. Метод штрафных функций.
2. Метод барьерных функций.
3. Стратегии изменения коэффициентов штрафа.
4. Виды штрафных функций для ограничений равенств.
5. Виды штрафных функций для ограничений неравенств.
6. Виды барьерных функций.

Лабораторная работа № 4

Статистические методы поиска

Цель работы

Ознакомиться со статистическими методами поиска при решении задач нелинейного программирования [12]. Изучить методы случайного поиска при определении локальных и глобальных экстремумов функций.

Методические указания

Статистические методы поиска иногда делят на 2 вида: ненаправленный и направленный поиск. Ненаправленный случайный поиск используется чаще всего для определения глобального экстремума задачи нелинейного программирования. В этом случае последующие испытания проводятся совершенно независимо от результатов предыдущих. В допустимой области генерируются случайные точки, в которых вычисляются значения целевой функции. В простейшем случае генерация осуществляется по равномерному закону в n-мерном гиперпрямоугольнике. Если задача с ограничениями, то допустимая область вписывается в гиперпрямоугольник, и оставляются только те точки, которые попадают в допустимую область. В направленном случайном поиске отдельные испытания связаны между собой. Результаты уже проведенных испытаний используются для проведения последующих. Сходимость таких методов значительно выше, но приводят они только к локальным решениям. Примерами таких методов являются алгоритм с парной пробой, алгоритм наилучшей пробы, в котором генерируются случайные точки на сфере и спуск осуществляется в "наилучшем" направлении, алгоритм статистического градиента, алгоритм наилучшей пробы с направляющим гиперквадратом.

При тестировании реализованных алгоритмов желательно фиксировать начальное значение генератора случайных чисел. Это позволит повторить работу алгоритма при повторном запуске программы.

Порядок выполнения работы

1. Для поиска минимума заданной функции реализовать простейший случайный поиск минимума в гиперпрямоугольнике. Желательно результаты поиска отображать в графическом режиме.
2. Реализовать алгоритм наилучшей пробы с направляющим гипер-квадратом.
3. Сравнить результаты работы алгоритмов случайного поиска с результатами работы методов штрафных функций.

Варианты заданий совпадают с вариантами заданий к лабораторной работе № 3.

Содержание отчета

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; задание; таблицы с результатами проведенных исследований, где должны быть отражены задаваемая точность, количество случайных проб, найденная точка и значение функции в ней, а также выводы об эффективности методов случайного поиска, их трудоёмкости, возможностях при определении локального и глобального экстремума.

Контрольные вопросы

1. Алгоритм с парной пробой.
2. Алгоритм статистического градиента.
3. Алгоритм наилучшей пробы с направляющим гиперквадратом.
4. Алгоритмы глобального поиска.

Лабораторная работа № 5

Решение транспортных задач линейного программирования

Цель работы

Ознакомиться с методами решения транспортных задач линейного программирования: алгоритмами построения опорного плана, определением оптимального плана методом потенциалов [4,5].

Методические указания

При решении транспортной задачи методами линейного программирования и методом потенциалов используйте соответствующее программное обеспечение.

Порядок выполнения работы

1. Решить заданную транспортную задачу как задачу линейного программирования методом последовательного улучшения плана или методом последовательного уточнения оценок.
2. Решить исходную транспортную задачу методом потенциалов, определяя опорный план методом северо-западного угла и методом минимального элемента.
3. По методу потенциалов сделать ручной просчёт исходной транспортной задачи.
4. Сгенерировать задачу линейного программирования небольшой размерности и выполнить ручной просчет.

Варианты заданий

1.

$a_i \backslash b_j$	7	7	7	7	2
4	16	30	17	10	16
6	30	27	26	9	23
10	13	4	22	3	1
10	3	1	5	4	24

2.

$a_i \backslash b_j$	19	19	19	19	4
20	15	1	22	19	1
20	21	18	11	4	3
20	26	29	23	26	24
20	21	10	3	19	27

3.

$a_i \backslash b_j$	11	13	26	10	10
24	21	19	11	12	12
12	26	29	14	1	26
18	39	1	22	8	25
16	53	23	40	26	28

4.

$a_i \backslash b_j$	7	8	4	11	30
16	25	28	20	15	7
12	27	5	11	23	10
14	1	25	14	16	16
18	8	6	4	16	18

5.

$a_i \backslash b_j$	8	9	13	8	12
9	5	15	3	6	10
11	23	8	13	27	12
14	30	1	5	24	25
16	8	26	7	28	9

6.

$a_i \backslash b_j$	7	7	7	7	42
22	9	17	29	28	8
13	13	21	27	16	29
17	20	30	24	7	26
18	11	19	30	6	2

7.

$a_i \backslash b_j$	8	10	10	8	14
9	5	15	3	4	10
11	45	8	13	26	12
14	30	8	1	24	25
16	8	26	7	28	9

8.

$a_i \backslash b_j$	3	13	7	7	40
22	8	17	29	28	8
13	13	21	17	16	29
17	20	25	24	7	24
18	11	19	30	6	2

Содержание отчета

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; задание; постановку транспортной задачи как задачи линейного программирования, результаты ее решения различными методами, выводы об эффективности различных методов решения транспортной задачи.

Контрольные вопросы

1. Метод последовательного улучшения плана.
2. Метод последовательного уточнения оценок.
3. Методы определения опорного плана транспортной задачи.
4. Условия оптимальности опорного плана.
5. Метод потенциалов.
6. Определение опорного плана в транспортной задаче с ограничениями.

Лабораторная работа № 6

Симплексные методы решения задач
линейного программирования

Цель работы

Использование методов линейного программирования для решения конкретных экономических задач [3,5] .

Методические указания

При решении задач линейного программирования используйте специальное программное обеспечение. Решать задачи линейного программирования можно также в системе Maple V. Пример решения задачи линейного программирования в системе Maple V:

```
> with(simplex):

> cnsts := {3*x+4*y-3*z <= 23, 5*x-4*y-3*z <= 10, 7*x+4*y+11*z <= 30}:

> obj := -x + y + 2*z:

> maximize(obj,cnsts union {x>=0,y>=0,z>=0});

{x = 0, y = 49/8, z = 1/2}.
```

Порядок выполнения работы

1. Сформулировать заданную задачу как задачу линейного программирования.
2. Решить задачу методом последовательного улучшения плана или методом последовательного уточнения оценок. Дать смысловую интерпретацию полученного решения.
3. Составить двойственную задачу для любой поставленной задачи линейного программирования и решить её. Дать интерпретацию переменным двойственной задачи.

Варианты заданий

1. (Распределительная задача)

Плановое задание по изготовлению 4 видов костюмов необходимо распределить между 3 швейными фабриками. Производственные мощности i-й фабрики ($i = 1,2,3$) позволяют за рассматриваемый период времени выпустить r_{ij} костюмов j-й модели ($j=1,2,3,4$). При этом, если все производственные мощности фабрики идут на производство костюмов одного типа, то костюмы других видов производиться не могут. Заданы цены c_j на костюм j-й модели и себестоимости s_{ij} изготовления j-й модели на i-й фабрике.

$$R = \begin{bmatrix} 20 & 240 & 300 & 150 \\ 240 & 300 & 200 & 300 \\ 150 & 240 & 300 & 200 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 400 & 400 & 500 & 200 \\ 250 & 300 & 250 & 400 \\ 400 & 500 & 400 & 300 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 500 & 650 & 800 & 500 \end{bmatrix}.$$

Плановое задание (180, 150, 100, 100).

Опираясь на эти данные ответить на вопросы:

- Может ли быть выполнено плановое задание?
- Составить оптимальный план загрузки фабрик из условия минимизации себестоимости плановой продукции.
- Составить оптимальный план загрузки из условия максимизации прибыли при точном выполнении планового задания.
- То же, при допустимости перевыполнения планового задания.
- Составить оптимальный план загрузки фабрик, обеспечивающий максимальное количество комплектов костюмов, если числа планового задания рассматривать как ассортиментные отношения.

2. (Определение оптимального ассортимента)

Предприятие располагает ресурсами сырья, рабочей силой и оборудованием, необходимыми для производства любого из 4 видов производимых товаров. Затраты ресурсов на изготовление единицы данного вида товара, прибыль, получаемая предприятием, а также запасы ресурсов указаны в табл.1.

Таблица 1

Исходные данные

Вид ресурса	Товары				Объем ресурсов
	1	2	3	4	
Сырье, кг	3	5	2	4	60
Рабочая сила, часы	22	14	18	30	400
Оборудование, станко-часы	10	14	8	16	128
Прибыль на единицу товара	300	250	560	480	

По этим исходным данным ответить на вопросы:

- Какой ассортимент товара надо выпускать, чтобы прибыль была максимальной?
- Определить, как повлияет на максимальную прибыль увеличение каждого ресурса на единицу.
- Определить оптимальный ассортимент при дополнительном условии: 1-го товара выпустить не более 5 ед., 2-го - не менее 8 ед., а 3-го и 4-го в соотношении 1:2.
- Дополнительно к пункту 1 заданы производственные издержки в рублях на 1 ед. каждого изделия: 60, 90, 120, 30. Найти оптимальный ассортимент, максимизирующий прибыль, при условии, что суммарные производственные издержки не должны превышать 960 руб.
- Определить изменение в оптимальном ассортименте, найденном в пункте 1, если ресурсы сырья увеличены на 50%, а ресурсы рабочей силы и оборудования на 30%.

3. (Задача о смесях)

Нефтеперерабатывающий завод получает 4 различных полуфабриката: 400 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекинг-бензина, 350 тыс. л бензина прямой перегонки и 100 тыс. л изопентона. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуются три сорта авиационного бензина: бензин А 2:3:5:2, бензин Б - 3:1:2:1 и бензин С - 2:2:1:3.

Стоимость 1 тыс. л указанных сортов бензина характеризуется числами 12000 руб., 10000 руб., 15000 руб.

По этим исходным данным решить следующие задачи:

- Определить план смешения компонентов, при котором будет достигнута максимальная стоимость всей продукции.
- Определить оптимальный план смешения из условия максимального использования компонентов.

4. (Задача о раскрое)

Полуфабрикаты поступают на предприятие в виде листов фанеры. Всего имеется две партии материала, причем первая партия содержит 400 листов, а вторая 250 листов фанеры. Из поступающих листов фанеры необходимо изготовить комплекты, включающие 4 детали 1-го типа, 3 детали 2-го типа и 2 детали 3-го типа. Лист фанеры каждой партии может раскраиваться различными способами.

Количество деталей каждого типа, которое получается при раскрое одного листа соответствующей партии по тому или иному способу раскроя, представлено в таблице.

Таблица 2

Исходные данные

Детали	Способ раскроя (1 п)			Детали	Способ раскроя (2 п)	
	1	2	3		1	2
1	0	6	9	1	6	5
2	4	3	4	2	5	4
3	10	16	0	3	8	0

Требуется раскроить материал так, чтобы обеспечить изготовление максимального количества комплектов.

5. (Определение оптимального плана производства)

На фабрике производится продукты двух типов. Для производства используются станки трех типов, два типа сырья, квалифицированная и неквалифицированная рабочая сила.

Сырье. Для производства одной единицы первого продукта требуется одна единица сырья первого типа и семь единиц сырья второго типа. Для производства одной единицы второго продукта требуется три единицы сырья первого типа и пять единиц сырья второго типа.

Станки. Станок первого типа имеет ресурс мощности $3{\cdot}10^6$, второго типа – $1{\cdot}10^6$, третьего типа – $3{\cdot}10^5$. При производстве первого продукта используется 0.5 единиц ресурса мощности станка первого типа, 0.2 единицы ресурса мощности станка второго типа и 0.025 единиц ресурса мощности станка третьего типа. При производстве второго продукта используется 2 единицы ресурса мощности станка первого типа, 0.5 единиц ресурса мощности станка второго типа и 0.1 единица ресурса мощности станка третьего типа.

Персонал. Бригада из одного квалифицированного рабочего и восьми неквалифицированных рабочих может выпустить $1.5{\cdot}10^5$ единиц первого продукта. Бригада из двух квалифицированных рабочих и 11-ти неквалифицированных рабочих может выпустить $4{\cdot}10^4$ единиц второго продукта.

Стоимость одной единицы сырья первого типа 1 руб., второго типа – 0.15 руб. Стоимость одного станка первого типа $8{\cdot}10^6$ руб., станка второго типа – $7{\cdot}10^6$ руб., станка третьего типа – $9{\cdot}10^6$ руб. Амортизационные отчисления составляют 5 % от стоимости станка. Заработная плата квалифицированных рабочих $6.25{\cdot}10^3$ руб., неквалифицированных – $4{\cdot}10^3$ руб.

Цена первого продукта составляет 3.5 руб., второго – 12.5 руб.

Считается, что имеется неограниченное количество сырья. В наличии имеется 5 станков первого типа, 5 – второго типа, 3 – третьего типа. Максимальное число квалифицированных рабочих – 360, неквалифицированных – 2500. Платежеспособный спрос на первый продукт составляет $2.2\cdot10^7$ руб., на второй продукт – $2.7\cdot10^7$ руб.

Плановое задание: $1.25\cdot10^7$ единиц первого продукта и $4\cdot10^6$ единиц второго продукта.

По этим исходным данным решить следующие задачи:

- Выполнимо ли плановое задание? Если да, то вычислить себестоимость плановой продукции и объем необходимых ресурсов.
- Определить оптимальный план выпуска продукции из условия максимальной стоимости продукции.
- Определить оптимальный план выпуска продукции из условия максимальной прибыли.

Содержание отчета

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; задание; постановку прямой и двойственной задачи линейного программирования, интерпретацию переменных прямой и двойственной задач, результаты ее решения, а также выводы по результатам решения.

Контрольные вопросы

1. Прямая и двойственная задачи линейного программирования.
2. Теоремы двойственности.
3. Решение задач линейного программирования в системе MAPLE V.
4. Экономическая интерпретация переменных прямой и двойственной задачи линейного программирования и результатов их решения.

Лабораторная работа № 7

Решение задач квадратичного программирования

Цель работы

Исследование методов решения задач квадратичного программирования [9].

Методические указания

Задача квадратичного программирования представляет собой частный случай задачи нелинейного программирования, когда ограничения линейны, а целевая функция – сумма линейной и квадратичной форм:

$$Q(\bar{x}) = \bar{p}^{\mathrm{T}}\bar{x} + \bar{x}^{\mathrm{T}}C\bar{x} \to \min$$

при

$$q_j(\bar{x}) = a_j^{\mathrm{T}}\bar{x} - b_j \le 0, \quad j = \overline{1,m},$$

$$\bar{x} \ge \bar{0},$$

где C - положительно полуопределенная матрица.

В отличие от линейных задач, где решение находится в угловой точке многогранника, в квадратичных оптимальная точка может быть на ограничении, где нормаль к гиперплоскости ограничения совпадает с направлением градиента, а может находиться внутри допустимой области.

Задача квадратичного программирования может быть записана в следующем виде:

$$\min\left\{\bar{p}^{\mathrm{T}}\bar{x} + \bar{x}^{\mathrm{T}}C\bar{x} \,\middle|\, A\bar{x} \le \bar{b}, \;\; \bar{x} \ge \bar{0}\right\}.$$

Методы решения задач квадратичного программирования опираются на условие Куна-Такера. Основными являются [9]: Метод Франка и Вулфа; Метод Баранкина и Дорфмана; Метод Била; Метод Тейла и Ван Де Панна.

Порядок выполнения работы

1. В соответствии с вариантом задания сформулировать задачу квадратичного программирования.
2. Решить задачу квадратичного программирования, используя специальное программное обеспечение.
3. Изобразить допустимую область и траекторию поиска оптимального решения на графике.

Варианты заданий

Целевая функция:

1. $F_1(\bar{x}) = (x_1 - 4)^2 + 100x_2{}^2$,
2. $F_2(\bar{x}) = 100x_1{}^2 + (x_2 - 3)^2$.
3. $F_3(\bar{x}) = (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 10)^2$
4. $F_4(\bar{x}) = 100(x_1 - 10)^2 + (x_2 - 10)^2$
5. $F_5(\bar{x}) = (x_1 - 100)^2 + (x_2 - 10)^2$
6. $F_6(\bar{x}) = (x_1 - 10)^2 + 100(x_2 - 10)^2$

7. $F_7(\bar{x}) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 + 10)^2$

8. $F_8(\bar{x}) = 5(x_1 - 5)^2 + (100x_2 - 1)^2$

Ограничения:

$$-x_1 + 3x_2 \le 12,\ 2x_1 + 5x_2 \le 30,\ 3x_1 + 2x_2 \le 22,$$
$$x_1 - 3x_2 \le 0,\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10,\ 5x_1 + x_2 \ge 5,$$
$$\bar{x} \ge 0.$$

Содержание отчета

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; задание; результаты численных экспериментов и графическую иллюстрацию анализа, а также выводы.

Контрольные вопросы

1. Условие Куна-Такера для задачи квадратичного программирования.
2. Метод Франка и Вулфа.
3. Метод Баранкина и Дорфмана.
4. Метод Била.
5. Метод Тейла и Ван Де Панна.

Лабораторная работа № 8

Многокритериальные задачи линейного и нелинейного программирования

Цель работы

Исследование многокритериальных задач линейного и нелинейного программирования при различных компромиссных критериях [5].

Методические указания

Основная трудность принятия решений в условиях определенности связана с наличием нескольких критериев. В этом случае возникает необходимость в формировании некоторого компромиссного векторного критерия.

Пусть имеется совокупность критериев:

$$F_1(\bar{x}), F_2(\bar{x}), \ldots, F_n(\bar{x}),$$

которые необходимо максимизировать, и $\bar{x}$ принадлежит допустимой области X.

Если все критерии измеряются в одной шкале, то компромиссный критерий можно записать в виде взвешенной суммы критериев:

$$F_0(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i F_i(\bar{x}), \tag{7}$$

где w_i – вес соответствующего критерия. В этом случае необходимо найти

$$\max_{x \in X} F_0(\bar{x}) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} w_i F_i(\bar{x}).$$

Если же критерии измеряются в различных шкалах, то необходимо привести их к единой шкале. Для этого критерий может быть сформирован в следующем виде:

$$\min_{x \in X} F_0(\bar{x}) = \min_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{F_i^{\max} - F_i(\bar{x})}{\left|F_i^{\max}\right|}, \tag{8}$$

где $F_i^{\max} = \max_{x \in X} F_i(\bar{x})$ и $F_i^{\max} \neq 0$. В этом случае требуется минимизировать величину отклонения каждого критерия от его оптимального значения. При таком формировании обобщенного критерия можно добиться высоких показателей по одним критериям за счет ухудшения показателей по другим.

На некоторые частные критерии могут быть наложены ограничения

$$F_i(\bar{x}) \geq F_{i\partial o\pi}. \tag{9}$$

Тогда исходная многокритериальная задача может быть преобразована к виду (7) или (8) с дополнением системы ограничением вида (9).

Решение многокритериальных задач зависит от выбора весовых коэффициентов. Для лица, принимающего решения, важно уметь не только решать многокритериальные задачи, но и сравнивать полученные решения между собой с целью выделения наиболее оптимальных. Одним из критериев сравнения может быть критерий Парето.

Решение называется оптимальным по *Парето*, если не существует никакого другого решения, улучшающего значение одного из критериев и неухудшающего значения остальных критериев. Так как Парето-оптимальное решение может быть не единственным, то возникает понятие Парето-оптимального множества решений.

При определении Парето-оптимального множества полезно изобразить на графике изменения допустимых значений критериев. Так, в одномерном случае, когда критерии зависят от одной переменной (см. рис.4), Парето-оптимальное множество состоит из одной точки, соответствующей максимальным значениям критериев, а на рис. 5. Парето-оптимальным является все множество решений.

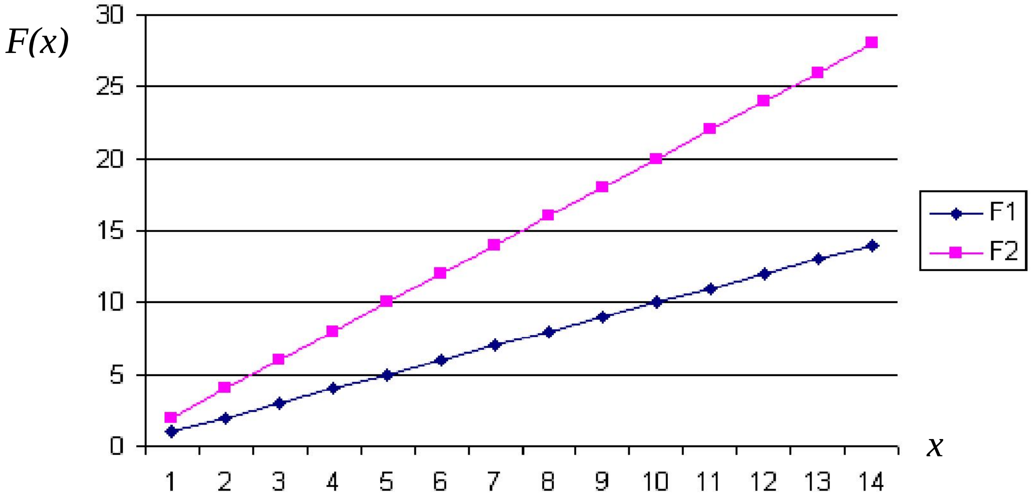

Рис. 4. Значения критериев F1 и F2
(Парето-оптимальное множество – одна точка)

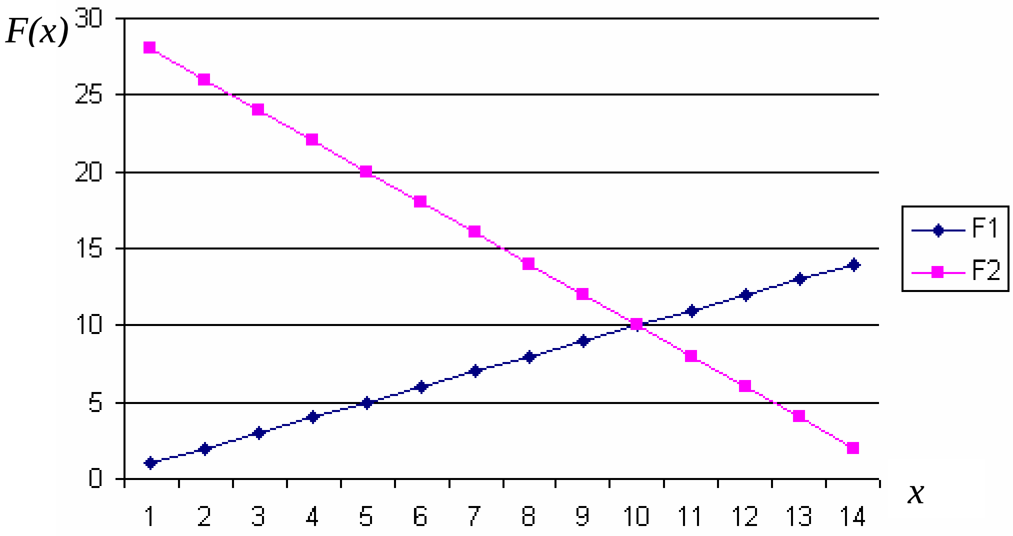

Рис. 5. Значения критериев F1 и F2
(Парето-оптимальное множество – все возможные решения)

В случае, когда критерии зависят более, чем от одной переменной удобно изобразить множество значений критериев в координатах F1 и F2 (рис.6). Если критерии F1 и F2 необходимо максимизировать, то Парето-оптимальным множеством является граница области допустимых значений, отмеченная на рис.6 фигурной скобкой.

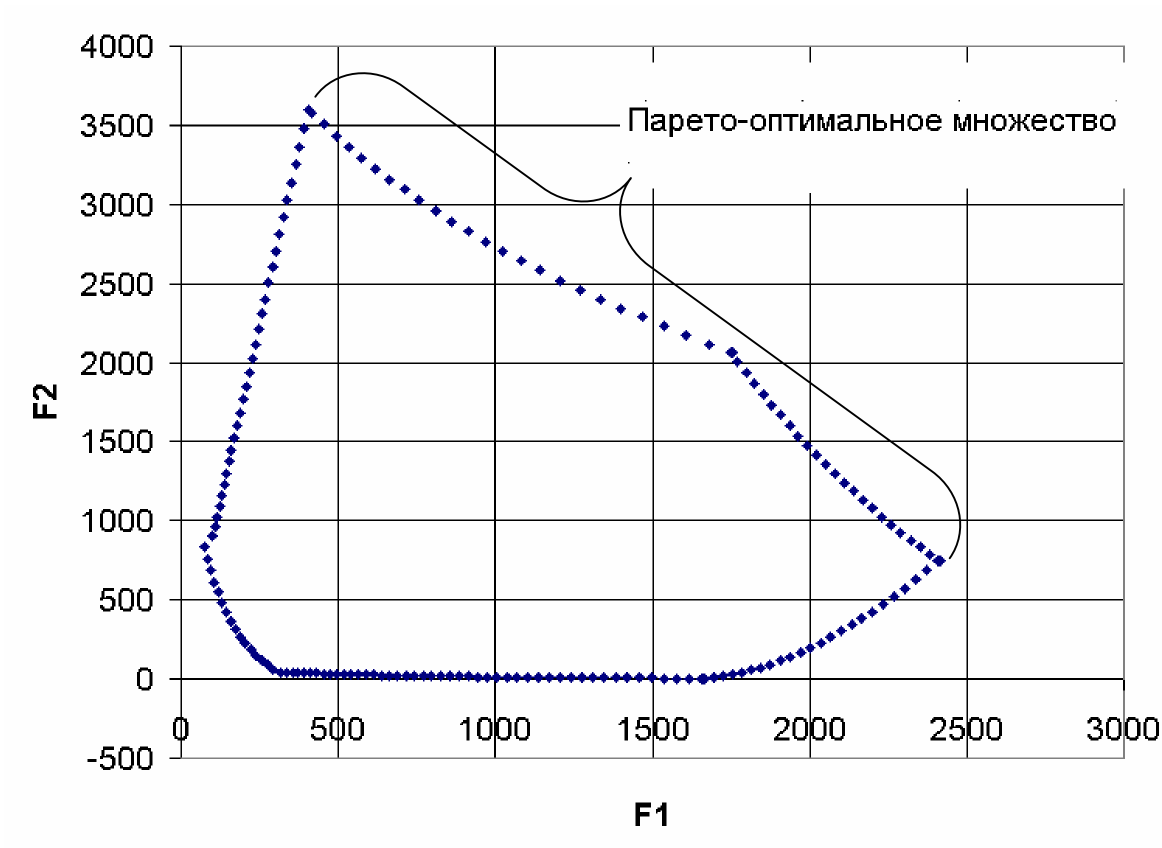

Рис.6. Нахождение Парето-оптимального множества в координатах критериев F1 и F2

Порядок выполнения работы

1. Определить тип компромиссного критерия (7) или (8), который необходимо использовать для решения варианта задания.
2. Используя программное обеспечение решения задач линейного и нелинейного программирования, исследовать влияние весовых коэффициентов w_i на оптимальное компромиссное решение.
3. Изобразить множество допустимых значений критериев в координатах F_i, F_j в соответствие с вариантом задания. Найти Парето-оптимальное множество решений.

Варианты заданий

Множество критериев для задач линейного программирования:

$$F_1(\bar{x}) = 5x_1 + 8x_2,$$

$$F_2(\bar{x}) = -20000x_1 - 9000000x_2,$$

$$F_3(\bar{x}) = x_1 - 2x_2.$$

Множество критериев для задач нелинейного программирования:

$$F_1(\bar{x}) = (x_1 - 4)^2 + 100{x_2}^2,$$
$$F_2(\bar{x}) = 100{x_1}^2 + (x_2 - 3)^2.$$
$$F_3(\bar{x}) = (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 10)^2$$

Ограничения:

$$-x_1 + 3x_2 \le 12,\ 2x_1 + 5x_2 \le 30,\ 3x_1 + 2x_2 \le 22,$$
$$x_1 - 3x_2 \le 0,\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10,\ 5x_1 + x_2 \ge 5,$$
$$\bar{x} \ge 0.$$

Решить следующие многокритериальные задачи линейного и нелинейного программирования при заданной системе ограничений:

1. Критерии $F_1 \to \max, F_2 \to \min$.
2. Критерии $F_1 \to \max, F_3 \to \min$.
3. Критерии $F_1 \to \max, F_2 \to \max$.
4. Критерии $F_1 \to \max, F_3 \to \max$.
5. Критерии $F_2 \to \max, F_3 \to \min$.
6. Критерии $F_2 \to \max, F_3 \to \max$.
7. Критерии $F_2 \to \min, F_3 \to \min$.
8. Критерии $F_2 \to \min, F_3 \to \max$.

Содержание отчета

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; задание; результаты численных экспериментов; графическую иллюстрацию анализа; сравнительный анализ решения многокритериальных задач линейного и квадратичного программирования; траектории изменения решения многокритериальной задачи в зависимости от весовых коэффициентов; график допустимых значений критериев и Парето-оптимальное множество решений; выводы.

Контрольные вопросы

1. Примеры многокритериальных задач.
2. Решение многокритериальных задач, когда критерии измеряются в одной шкале.
3. Решение многокритериальных задач, когда критерии измеряются в различных шкалах.
4. Определение Парето-оптимального множества решений.

Лабораторная работа № 9

Принятие решений в условиях риска

Цель работы

Исследование вопросов принятия решения в условиях, когда выбор некоторой стратегии гарантирует получение желаемого результата с определенной вероятностью [5].

Методические указания

Задача принятия решения в условиях риска возникает в том случае, когда с каждой принимаемой стратегией x_i связано целое множество различных результатов O_j с известными вероятностями $P(O_j|x_i)$. Примем в качестве стратегии x_i выбор покупки акций одной из компаний.

Формально модель задачи может быть представлена в виде следующей матрицы (табл. 3).

Таблица 3

Модель задачи принятия решения в условиях риска

$x_i \backslash O_j$	O_1	O_2	...	O_m
x_1	$u(x_1,O_1)$	$u(x_1,O_2)$	...	$u(x_1,O_m)$
x_2	$u(x_2,O_1)$	$u(x_2,O_2)$	...	$u(x_2,O_m)$
...	...	...	...	...
x_n	$u(x_n,O_1)$	$u(x_n,O_2)$	...	$u(x_n,O_m)$

Здесь $u(x_i,O_j)$ - полезность результата O_j при использовании стратегии x_i, т.е. $u(x_i,O_j)$ – это общая прибыль от будущей продажи акций, купленных в настоящий момент времени, на фондовом рынке или изменение котировок акций компании.

Если известны вероятности $P(O_j|x_i)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, то можно ввести ожидаемую полезность для каждой стратегии:

$$E[U(x_i)]=\sum_{j=1}^{m}u(x_i,O_j)P(O_j|x_i),\ i=\overline{1,n}.$$

Очевидно, что в качестве оптимальной стратегии следует выбирать ту, для которой ожидаемая полезность максимальна.

Определение вероятностей результатов

Считается, что достигается результат O_j, если некоторая величина Z попадает в интервал значений $[z_{j-1}, z_j]$. Распределение случайной величины Z зависит от принимаемой стратегии x_i. Условные плотности $f(z|x_i)$ неизвестны. Однако в процессе наблюдений накоплены соответствующие статистические данные, представленные в виде выборок для каждой из возможных стратегий.

В нашем случае случайной величиной Z может быть следующее.

- Изменение котировки акции. Например, можно говорить, что достигается результат O_1, если реализация случайной величины Z принадлежит отрезку $[-20,-15]$, что означает изменение котировки акции в интервале от –20 до –15 пунктов.
- Значение котировки акций. Например, можно говорить, что достигается результат O_1, если реализация случайной величины Z принадлежит отрезку $[15,20]$. Это означает, что значение котировки акции находится в интервале от 15 до 20 пунктов.

Поскольку различных значений котировок может быть достаточно много, то для сокращения размерности следует провести группирование. При этом следует учитывать погрешности, возникающие при группировании, а именно, чем больше величина интервалов, тем больше величина погрешности.

Пусть имеется статистика изменений котировок акций за некоторый период времени. Разобьем весь период времени на N интервалов. Тогда условные вероятности можно оценить по формуле $P(O_j|x_i) = n_{ij} / N$, где n_{ij} – количество событий O_j, произошедших за весь период наблюдения за поведением i-й акции.

Поиск статистических данных в Интернет

Бесплатные статистические данные можно найти на сайте, принадлежащем корпорации CNN, по адресу http://cnnfn.com [6].

Для обозначения какой-либо компании используется специальный символ – набор определенных букв, который называется тикер-символом компании или просто тикером. Для получения котировок достаточно ввести в поле формы тикер-символы интересующей компании, разделенные пробелом. Если Вы не знаете тикер-символа корпорации, то в поле формы нужно набрать ее название или часть ее названия, выбрать из выпадающего меню пункт «STOCK SYMBOL LOOKUP» и Вам будет выдан список тикер-символов всех компаний, удовлетворяющих условию поиска. Если запрос генерируется во время работы фондового рынка, то котировки предоставляются с задержкой 15-20 минут. В то время, когда фондовый рынок закрыт, отображаются цены закрытия, а текущие котировки недоступны.

В отчете содержится информация о текущих котировках и содержится ссылка «CHARTS», на которой данные отображаются в графическом виде за выбранный период времени.

Порядок выполнения работы

1. В соответствии с вариантом задания на сайте http://cnnfn.com найти статистические данные об изменении котировок акций за три последних года с интервалом один месяц.
2. Рассчитать условные вероятности изменения котировок акций.
3. Принять решение о целесообразности покупки акции одной из трех компаний.

Варианты заданий

1. Компании, производящие видео- и аудиотехнику: "Sony", "Philips", "Sharp".
2. Компании, производящие фототовары: "Fuji", "Kodak", "Sony".
3. Компании, производящие автомобили: "Ford", "Nissan", "Toyota".
4. Компании из области быстрого питания: "A&A", "Avrora", "Bravo".
5. Компании, производящие бытовую технику: "Ardo", "Ariston", "Siemens".
6. Компании, производящие программное обеспечение: "Microsoft", "NETSoftware", "Sun".
7. Нефтяные компании: "British Petroleum", "Oil", "Shell".
8. Компании, производящие процессоры: "Intel", "AMD", "Cyrix".

Содержание отчета

Отчет по работе должен содержать титульный лист, цель работы, вариант задания, математическую постановку задачи, статистические данные, результаты расчетов условных вероятностей, ожидаемые полезности по каждой стратегии и оптимальную стратегию, выводы.

Контрольные вопросы

1. Как формируется критерий принятия решения в условиях риска?
2. Что такое полезность и какова методика ее определения?

3. Вычисление условных вероятностей.

Лабораторная работа № 10

Принятие решений в условиях неопределенности

Цель работы

Исследование вопросов принятия решения в условиях, когда выбор некоторой стратегии гарантирует получение желаемого результата с определенной вероятностью с учетом неопределенного состояния среды.

Методические указания

Постановка задачи

В отличие от задачи принятия решения в условиях риска в данном случае играет роль и состояние среды $s_1, s_2, \ldots, s_K$, в котором она находится [2,5].

Пусть заданы или могут быть определены полезности результатов O_j при использовании стратегии x_i: $u(x_i, O_j)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

В зависимости от состояния среды результат O_j достигается с вероятностью $P(O_j | x_i, s_k)$. Наблюдателю неизвестно распределение вероятностей среды $P(s_k)$. Относительно состояния среды наблюдатель может только высказывать определенные гипотезы. Эти предположения о вероятном состоянии среды являются субъективными вероятностями $\tilde{P}(s_k)$, $k = \overline{1,K}$. Если бы величины $P(s_k)$ были известны наблюдателю, то мы пришли бы к задаче принятия решения в условиях риска.

Критерий Вальда

Это критерий "осторожного наблюдателя". Он оптимизирует полезность в предположении, что среда находится в самом невыгодном для наблюдателя состоянии. По данному критерию решающее правило имеет следующий вид:

$$\max_{x_i} \min_{s_k} U(x_i, s_k) = \max_{x_i} \min_{s_k} \sum_{j=1}^{n} u(x_i, O_j) P(O_j | x_i, s_k),$$

По критерию Вальда выбирают стратегию, которая дает гарантированный выигрыш при наихудшем варианте состояния среды.

Критерий Гурвица

Он основан на следующих двух предположениях: среда может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью $1-\alpha$, и в самом выгодном - с вероятностью α, где α - коэффициент доверия. Решающее правило имеет вид:

$$\max_{x_i}\left[\alpha \max_{s_k} U(x_i, s_k) + (1-\alpha)\min_{s_k} U(x_i, s_k)\right],$$

где $0 \le \alpha \le 1$. Очевидно, что при $\alpha = 0$ получаем критерий Вальда, а при $\alpha = 1$ приходим к правилу

$$\max_{x_i}\max_{s_k} U(x_i, s_k),$$

что представляет собой стратегию "здорового оптимиста".

Критерий Лапласа

Если неизвестны вероятности состояний среды, то при данном подходе все состояния среды предполагаются равновероятными:

$$P(s_1) = P(s_2) = \ldots = P(s_K).$$

В результате решающее правило принимает вид:

$$\max_{x_i} E[U(x_i)] = \max_{x_i} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{K} u(x_i, O_j) P(O_j | x_i, s_k) P(s_k),$$

при условии $P(s_k) = 1/K$.

Критерий Сэвиджа

Это критерий минимизации сожалений. "Сожаление" – это величина, равная изменению полезности результата при данном состоянии среды относительно наилучшего возможного состояния. Чтобы определить "сожаление", поступаем следующим образом. Строим матрицу $U = \|u_{ik}\|$, где

$$u_{ik} = U(x_i, s_k) = \sum_{j=1}^{n} u(x_i, O_j) P(O_j | x_i, s_k),\ i = \overline{1, m},\ k = \overline{1, K}.$$

В каждом столбце этой матрицы находим максимальный элемент

$$u_k = \max_i u_{ik}.$$

Его вычитают из всех элементов этого столбца, вычисляя величины

$$u_{ik}^c = |u_{ik} - u_k|,\ i = \overline{1, m},\ k = \overline{1, K},$$

из которых составляют матрицу сожалений

$$U_c = \|u_{ik}^c\|.$$

В качестве оптимальной выбирают ту стратегию x_i, которая минимизирует максимальное "сожаление":

$$\min_{x_i} \max_{s_k} u_{ik}^c .$$

Этот критерий минимизирует возможные потери при условии, что состояние среды наихудшим образом отличается от предполагаемого.

В работе предлагается оптимизировать инвестиции денежных средств в ценные бумаги с учетом изменений состояния среды [6]. Интерпретация всех необходимых переменных совпадает с интерпретацией, введенной в предыдущей работе. В качестве состояния среды предлагается использовать среднюю температуру воздуха на Земле. Возможны три состояния: S_1 – низкая температура от 0°C до +10°C; S_2 – средняя температура от 10°C до +16,5°C; S_3 – высокая температура от 16,5°C до 20°C. Статистика изменения состояния среды в зависимости от месяца года представлена в табл.4. Температура в последующие моменты времени можно определить линейной аппроксимацией

Таблица 4

Средняя температура воздуха на Земле

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1998							19,50	19,50	17,60	14,50	11,40	9,10
1999	7,96	8,30	9,20	12,15	15,27	17,96	19,60	11,54	17,70	14,52	11,48	9,15
2000	8	8,31	9,25	12,20	15,31	18	19,70	19,60	17,70	14,53	11,50	9,2
2001	8,10	8,35	9,35	12,25	15,35	18,10						

Вероятности $P(O_j|x_i, s_k)$ определяются следующим образом. Подсчитывается количество результатов O_j при использовании стратегии x_i и состоянии среды S_k и делится на количество всех произошедших результатов, когда среда находилась в состоянии S_k.

Порядок выполнения работы

1. В соответствии с вариантом задания на сайте http://cnnfn.com найти статистические данные об изменении котировок акций за три последних года с интервалом один месяц.
2. Вычислить вероятности $P(O_j|x_i, s_k)$.
3. Вычислить значения критериев Вальда, Гурвица, Лапласа, Сэвиджа и определить соответствующие оптимальные стратегии.
4. Сравнить результаты.

Варианты заданий

1. Компании, выпускающие прохладительные напитки: "Coca-Cola", "Pepsi Co", "Tropicana".
2. Компании, выпускающие спортивные товары: "Adidas", "Reebok", "Nike".
3. Компании, производящие косметику: "Revlon", "L'Oreal", "Max Factor".
4. Винодельческие компании: "Dr.Zenzen", "Caldirola", "Gandia".
5. Компании, производящие декоративную косметику: "Maybelline", "Bourjois", "Coty".
6. Компании, производящие косметические средства: "Taft", "Procter&Gamble", "Nivea".
7. Компании, производящие джинсовую одежду: "Lee", "Levis", "Vigoss".
8. Компании, выпускающие чулочно-носочную продукцию: "Levante", "Golden Lady", "Pompea".

Содержание отчета

Отчет по работе должен содержать титульный лист, цель работы, вариант задания, математическую постановку задачи, статистические данные, результаты расчетов условных вероятностей, ожидаемые полезности по каждой стратегии и оптимальную стратегию, выводы.

Контрольные вопросы

1. Критерий Вальда.
2. Критерий Гурвица.
3. Критерий Лапласа.
4. Критерий Сэвиджа.
5. В каком случае задача может быть сведена к задаче принятия решения в условиях риска?

Лабораторная работа № 11

Решение матричных игр

Цель работы

Ознакомиться с методами решения задач матричных игр методами линейного программирования [3,11].

Методические указания

Матричная игра представляет собой антагонистическую игру двух лиц с платежной матрицей $A_{m\times n}$, с m возможными стратегиями первого игрока и n стратегиями второго игрока. Первый игрок стремится максимизировать выигрыш, второй – минимизировать проигрыш. Если матрица игры имеет седловую точку, т.е. существует элемент, являющийся максимальным в столбце и минимальным в строке, то игра имеет решение в чистых стратегиях. В противном случае игра имеет решение в смешанных стратегиях, которые представляют собой вероятностные распределения на множестве чистых стратегий: $\bar{x} = (x_1,...,x_m)^T$ – смешанная стратегия первого игрока, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$; $\bar{y} = (y_1,...,y_n)^T$,– смешанная стратегия второго игрока, $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$.

Использование в игре оптимальных смешанных стратегий обеспечивает первому игроку выигрыш, не меньший, чем при использовании им любой другой стратегии; второму игроку – проигрыш не больший, чем при использовании им любой другой стратегии.

С точки зрения 1-го игрока игру можно записать как задачу линейного программирования

$$V \to \max;$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \ge V, \quad j = 1,...,n;$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \; x_i \ge 0; \; i = 1,...,m;$$

где значение игры V рассматривается как $m+1$-я переменная, неограниченная по знаку (свободная).

С точки зрения 2-го игрока игру задача имеет вид

$$V \to \min;$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le V, \quad i = 1,...,m;$$
$$\sum_{i=j}^{n} y_j = 1, \; y_j \ge 0; \; j = 1,...,n.$$

Причем обе эти задачи представляют собой пару двойственных задач линейного программирования: решив одну из них, можем найти смешанные стратегии обоих игроков.

Порядок выполнения работы

1. Сделать формальную постановку задачи.

2. Определить множество возможных стратегий игроков, при этом по возможности исключить эквивалентные стратегии.
3. Выписать матрицу игры.
4. Найти оптимальные стратегии игроков, используя симплекс-метод.

Задачи для решения

1. (Морра)
Игроки одновременно показывают один или два пальца, и в тот же момент каждый из игроков называет число. Если число, названное одним из игроков, совпадает с общим числом пальцев, показываемых обоими игроками, то игрок получает со своего противника выигрыш, равный этому числу.

2. (Игра A,B,C)
Тасуется колода, состоящая из трех карт: A,B,C, и каждому из двух игроков дается по одной карте. Посмотрев свою карту, I-й игрок делает предположение относительно того, какая карта у II-го игрока.. Посмотрев на свою карту и услышав предположение I-го игрока, II-й игрок также пытается угадать карту I-го. Если какой-либо из игроков угадывает правильно, другой платит ему 1$.

3. (Упрощенный покер)
Первый игрок получает одну из карт Ст и Мл с равными вероятностями, а затем может или "сделать ставку" или "спасовать". Если первый делает ставку, то второй может "спасовать" и потерять α или "уравнять игру", и выиграть или потерять β в зависимости от того, имеется ли на руках у первого игрока карта Мл или Ст. Если первый игрок пасует, то второй может также пасовать, что дает выигрыш 0, или сделать ставку, выигрывая α, если у первого игрока карта Мл, и теряя β, если у первого игрока Ст.

4. (о шарах)
Известно, что в урне находятся два шара, каждый из которых либо белый, либо черный. Игрок должен определить, сколько там черных шаров. Если его предположение правильно, ему должно быть уплачено α; если его ответ отличается от правильного на 1 (например, он указывает 1, когда в действительности 2 черных шара, или указывает 2, когда в действительности один шар, и т.д.), то ему должно быть уплачено β; если ответ отличается от правильного на 2, то ему должно быть уплачено γ, причем $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Стоимость исследования одного шара равна δ.

Варианты заданий

1. Задача 1
2. Задача 2
3. Задача 3 при $\alpha = 1$, $\beta = 2$
4. Задача 3 при $\alpha = 2$, $\beta = 1$
5. Задача 3 при $\alpha = 5$, $\beta = 5$
6. Задача 4 при $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$, $\delta = 1$
7. Задача 4 при $\alpha = 5$, $\beta = 3$, $\gamma = 1$, $\delta = 1$
8. Задача 4 при $\alpha = 3$, $\beta = 3$, $\gamma = 3$, $\delta = 1$

Содержание отчета

Отчет по работе должен содержать титульный лист, цель работы, вариант задания, математическую постановку задачи, оптимальные стратегии игроков, значение игры, выводы.

Контрольные вопросы

1. Понятие стратегии. Чистые и смешанные стратегии. Выбор оптимальной стратегии.
2. Решение матричных игр с помощью методов линейного программирования.
3. Игры с нулевой суммой.

Лабораторная работа № 12

Методы целочисленного линейного программирования

Цель работы

Ознакомиться с методами целочисленного линейного программирования [8].

Методические указания

Для решения полностью целочисленных задач использовать первый и третий алгоритмы Гомори. Для решения частично целочисленных задач используется второй алгоритм Гомори.

Порядок выполнения работы

1. В соответствии с вариантом задания решить задачу целочисленного линейного программирования всеми алгоритмами Гомори. Проиллюстрировать полученные отсечения графически.
2. Сгенерировать задачу линейного программирования небольшой размерности и выполнить ручной просчет одним из методов Гомори (по указанию преподавателя). Проиллюстрировать полученные отсечения графически.

Варианты заданий

1. $F(\bar{x}) = 5x_1 + 8x_2$,
2. $F(\bar{x}) = -20000x_1 - 9000000x_2$,
3. $F(\bar{x}) = x_1 - 2x_2$,
4. $F(\bar{x}) = 7000x_1 + 3000x_2$,
5. $F(\bar{x}) = 2x_1 + 5x_2$.
6. $F(\bar{x}) = 5x_1 + 2x_2$.
7. $F(\bar{x}) = x_1 + 3x_2$.
8. $F(\bar{x}) = 9x_1 - x_2$.

Система ограничений одинакова для всех вариантов и имеет вид:

$$-x_1 + 3x_2 \le 12,\ 2x_1 + 5x_2 \le 30,\ 3x_1 + 2x_2 \le 22,$$

$$2x_1 - x_2 \le 12,\ x_1 - 3x_2 \le 0,\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10,\ 5x_1 + x_2 \ge 5,$$

$$\bar{x} \ge 0.$$

Содержание отчета

Отчет по работе должен содержать титульный лист, цель работы, вариант задания, графическую иллюстрацию решения с полученными отсечениями, выводы.

Контрольные вопросы

1. Первый алгоритм Гомори.
2. Второй алгоритм Гомори.
3. Третий алгоритм Гомори.
4. Понятие лексикографического отсечения.

Литература

1. Васильев В.П. Численные методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1980. - 518 с.
2. Волков И.К., Загоруйко И.К. Исследование операций 306 с.
3. Гейл Д. . Теория линейных экономических моделей. М.: Изд-во иностранной литературы, 1968.
4. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. - М.: Наука, 1969. - 384 с.
5. Зайченко Ю.П. Исследование операций. - Киев: Вища школа, 1975. - 320 с.
6. Закарян И.О. Филатов И.В. Интернет как инструмент для финансовых инвестиций. – СПб.: БХВ – Санкт-Петербург, 2000. – 256 с.
7. Карманов В.П. Математическое программирование. - М.: Наука, 1975. - 272 с.
8. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. – М.:Мир, 1969.
9. Кюнци Г.П., Крелле В., Нелинейное программирование, Изд - во "Советское радио", М., 1965.
10. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. - М.: Наука, 1978. - 352 с.
11. Петросян Л.А. Зенкевич Н.А. Семина Е.А. Теория игр : Учеб. пособие - М.: ВЫСШ. ШК.; : УНИВЕРСИТЕТ, 1998. - 300 с.
12. Растригин Л.А. Статистические методы поиска. - М.: Наука, 1968. - с. 82-121.
13. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.:Мир, 1975. – 534 с.