Тверской государственный технический университет

ЗАДАНИЕ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

по дисциплине **«Автономная и сетевая компьютерная обработка данных»**
для специальности БУАА

Составил: Демирский А.А.
tstu-demirskiy@rambler.ru

Тверь, 2011

Содержание

Введение в линейное программирование

Задачи оптимизации носят актуальный характер, поскольку отражают суть многих управленческих ситуаций. В модели условной оптимизации необходимо оптимизировать показатель эффективности (целевую функцию) для допустимых значений переменных решения. Возможные значения переменных решения задаются множеством ограничений в виде неравенств. Таким образом, необходимо выбрать значения переменных решения в соответствии с ограничениями и при этом сделать показатель эффективности наибольшим (модель максимизации) или наименьшим (модель минимизации) из всех возможных,

Одним из способов исследовать, к каким результатам приведут различные комбинации значений переменных решений, является применение анализа "Что-если". Однако хотелось бы избежать бессистемного перебора различных альтернативных решений, при котором есть риск пропустить оптимальное решение. Полный перебор сценариев "Что-если" в диапазоне возможных решений для типичных моделей условной оптимизации быстро становится утомительным даже для самых простых задач. Представьте, сколько времени займет изучение простейшей модели производства компании с помощью анализа "Что-если", если предположить, что есть шесть переменных решения и они могут принимать 100 различных значений. Выполнить полное исследование всех существующих комбинаций значений переменных практически невозможно, независимо от возможностей таблиц подстановки и быстродействия компьютера.

Очевидно, что подавляющее большинство комбинаций переменных решения нас не интересует, поскольку они нарушают одно или несколько ограничений модели или дают слишком низкую прибыль. Но как выявить эти комбинации? Это трудно сделать с помощью анализа "Что-если". В этом смысле оптимизационные модели существенно отличаются от простых моделей для анализа "Что-если".

Необходимо найти быстрый и эффективный способ просмотра комбинаций переменных для поиска допустимых решений. Для этого можно "перевернуть таблицу", сделав входы модели, используемые для построения сценариев "Что-если" (обычно это переменные решения), выходами. Это позволит прибегнуть к более эффективным процедурам поиска и избежать полного перебора многих тысяч комбинаций переменных.

Некоторые современные оптимизационные модели содержат тысячи или даже десятки тысяч переменных решения и ограничений, дня работы с ними требуется специальное программное обеспечение и мощные компьютеры. Однако многие представляющие интерес модели оптимального управления содержат десятки или сотни переменных и ограничений. Для моделей такого размера современные программы электронных таблиц часто являются наиболее удачным средством оптимизации: электронные таблицы обеспечивают практически идеальное сочетание гибкости, удобства моделирования, простоты использования и вычислительной мощности.

Существуют эффективные методы поиска решений для моделей оптимизации с линейными ограничениями. Модели с линейными ограничениями называются моделями линейного программирования (ЛП). Однако, прежде чем перейти непосредственно к процессу оптимизации моделей, следует уделить внимание представлению моделей ЛП в электронных таблицах. В этой методичке мы рассмотрим:

1) методику формализации моделей ЛП;
2) правила представления моделей ЛП в электронных таблицах, которые упростят применение средства Excel – «Поиск решения»;
3) использование средства «Поиск решения» для оптимизации моделей ЛП.

Формализация моделей линейного программирования

Ограничения

Первым этапом формализации модели линейного программирования (ЛП) должно стать выявление *ограничений* на переменные решения. Ограничения сужают множество допустимых решений. Приведем конкретные примеры ограничений, возникающие в задачах управления.

1. Решения директора завода ограничены производственной мощностью завода и имеющимися ресурсами.
2. Решение нефтяной компании использовать определенный тип нефти для производства бензина диктуется характеристиками бензина, пользующегося спросом на рынке.

В моделировании ограничения на допустимые значения переменных решения являются очень важным понятием. Ограничения в реальных управленческих моделях выражаются в числовом виде, но в своей основе имеют физическую, экономическую или даже политическую природу.

Целевая функция

Все модели линейного программирования имеют два общих основных свойства. Первое — это наличие ограничений. Второе свойство заключается в том, что в каждой модели линейного программирования существует единственный показатель эффективности, который необходимо максимизировать или минимизировать.

В приведенных выше примерах директор завода захочет удовлетворить спрос при минимальных производственных затратах, а нефтеперерабатывающая компания — использовать имеющуюся сырую нефть с максимальной прибылью.

Таким образом, в каждом из этих примеров существует некий показатель эффективности, который при принятии решения желательно максимизировать (как правило, это прибыль, эффективность или производительность) или минимизировать (обычно это затраты или время). В моделях оптимизации показатель эффективности, который следует оптимизировать, называется целевой функцией.

Каждая модель линейного программирования имеет целевую функцию, которую необходимо максимизировать или минимизировать, и ограничения.

Модели линейного программирования являются примером более широкого класса моделей — моделей принятия решений при наличии ограничений, которые также называются моделями условной оптимизации. Эти модели можно охарактеризовать следующим образом.

Модель условной оптимизации призвана так распределить ограниченные ресурсы, чтобы оптимизировать целевую функцию.

В этом определении под "ограниченными ресурсами" подразумеваются ресурсы, на которые распространяются ограничения.

Хотя существуют модели принятия решений при наличии ограничений более общего вида, во многих приложениях наиболее полезными являются модели линейного программирования. Эти модели успешно применялись для решения тысяч различных задач принятия решений. Рассмотрим конкретный пример формулировки задачи линейного программирования.

Пример данных для модели

Некоторая мебельная компания «Офисный интерьер» производит два типа офисных кресел: «Boss» и «Manager». Составим экономический прогноз на следующую неделю, предполагая, что можно будет продать все стулья марки «Boss» и «Manager», которые компания в состоянии произвести. Необходимо рекомендовать стратегию производства на следующую неделю, т.е. определить, сколько стульев каждой марки нужно произвести, если руководство компании стремится максимизировать недельную валовую прибыль (которая вычисляется как разность дохода и затрат).

При принятии решения в данной модели необходимо учитывать следующие факторы.

1. Стулья, произведенные компанией, продаются на той же неделе, удельная валовая прибыль (доход минус расход) составляет 1700 руб. для каждого проданного стула мирки «Boss» и 1200 руб. для каждого стула марки «Manager».
2. Для сборки стула нужны длинные штифты, короткие штифты и одно из двух типов сидений, которые имеются на складе в ограниченном количестве.
3. Запас длинных и коротких штифтов, которые можно будет использовать на следующей неделе, составляет 1280 и 1600 штук соответственно. Для производства одного стула марки «Boss» требуется 8 длинных и 4 коротких штифта, а для производства стула «Manager»— 4 длинных и 12 коротких штифтов (табл. 1).
4. Запас ножек на следующую неделю составляет 760 штук. Для производства одного стула любого типа требуется 4 ножки (табл. 2).
5. Запас прочных и облегченных сидений составляет 140 и 120 штук соответственно (табл. 3). Для производства стульев «Boss» используются прочные сиденья, а для «Manager» — облегченные.
6. Согласно договору общее число произведенных стульев не может быть менее 100.

Таблица 1. Штифты

Тип	Расход на 1 стул «Boss»	Расход на 1 стул «Manager»	Общий запас
Длинные штифты	8	4	1280
Короткие штифты	4	12	1600

Таблица 2. Ножки

Тип	Расход на 1 стул «Boss»	Расход на 1 стул «Manager»	Общий запас
Ножки	4	4	760

Таблица 3. Сиденья

Тип	Расход на 1 стул «Boss»	Расход на 1 стул «Manager»	Общий запас
Прочные	1	0	140
Облегченные	0	1	120

Задача состоит в том, чтобы в данных условиях определить, сколько стульев каждой марки необходимо произвести на следующей неделе. Используя терминологию моделирования, мы должны найти оптимальный ассортимент продуктов, или составить оптимальный план производства. Покажем, как данную ситуацию можно представить в виде задачи линейного программирования, а затем — в виде оптимизационной модели Excel. Для этого необходимо определить ограничения и целевую функцию.

Определение ограничений

Как уже отмечалось, существует ограниченный запас деталей, из которых можно собирать стулья «Boss» и «Manager». Это ограничивает суммарное количество стульев, которые можно собрать. Чтобы точно сформулировать ограничения, начнем с определения необходимого количества длинных штифтов. Длинные штифты требуются для производства обоих видов стульев. На изготовление одного стула «Boss» идет 8 длинных штифтов, а «Manager» — 4. Таким образом, для любого плана выпуска справедливо следующее равенство:

*8 * (к-во произведенных «Boss») + 4 * (к-во произведенных «Manager») =*
= суммарная потребность в длинных штифтах

Введем обозначения: пусть *C* — количество произведенных стульев «Boss» , *M* - количество произведенных стульев «Manager». Тогда выражение для суммарной потребности в длинных штифтах примет следующий вид:

8C + 4M = суммарная потребность в длинных штифтах.

Однако запас длинных штифтов составляет 1280 штук. Поэтому переменные решения *C* и *M* должны соответствовать ограничению

$$8C + 4M \leq 1280. \quad (1)$$

Это ограничение на суммарную потребность в длинных штифтах. Условие (1) называется ограничением в виде неравенства. Число 1280 называется правой частью неравенства. Левая часть неравенства, которая зависит от неизвестных С и М называется функцией ограничения. Неравенство (1) — символический способ представления ограничения, требующего, чтобы суммарная потребность в длинных штифтах для производства С штук стульев «Boss» и М штук стульев «Manager» не превышала имеющийся запас — 1280 штук длинных штифтов.

Для производства одного стула «Boss» требуется 4 коротких штифта, а «Manager» — 12. Поскольку запас коротких штифтов составляет 1600 штук, С и М должны также соответствовать ограничению

$$4C + 12M \leq 1600. \quad (2)$$

Неравенства (1) и (2) —два ограничения данной модели. Есть ли другие ограничения? В перечне пунктов, которые необходимо учесть, говорится об общем количестве выпуска стульев:

$$C + M \geq 100. \quad (3)$$

Еще одно ограничение отражает тот факт, что для сборки каждого стула требуется 4 ножки, а запас ножек составляет 760 штук.

$$4C + 4M \leq 760. \quad (4)$$

В пятом пункте списка говорится, что для изготовления стула «Boss» требуется прочное сиденье, а для «Manager» — облегченное. Указаны также запасы сидений обоих видов. Эта информация записывается в виде двух ограничений:

$$C \leq 140 \text{ и } M \leq 120. \quad (5)$$

Мы сформулировали в сжатой форме шесть ограничений в виде неравенств. Поскольку количество изготовленных изделий не может принимать отрицательное значение, необходимо включить два дополнительных ограничения

$$C \geq 0 \text{ и } M \geq 0. \quad (6)$$

Условие вида (6), которое требует, чтобы переменные принимали неотрицательные значения, называется условием неотрицательности. Следует помнить, что неотрицательность не то же самое, что положительность. Неотрицательность допускает значение 0, в то время как положительность не допускает нулевого значения.

Оценивание решений

Как и в предыдущих моделях, значение пары переменных С и М называется решением; сами переменные С и М называются переменными. В данной задаче решение — это структура производства изделий (стульев). Например, С = 6, М = 5 — это решение сделать 6 стульев марки «Boss» и 5 стульев «Manager». Некоторые неотрицательные решения будут соответствовать всем ограничениям модели (1)—(5), другие — нет. Так, решение С = 6, М= 5 удовлетворяет ограничениям (1), (2), (4), (5) и (6), но нарушает ограничение (3). Данное решение недопустимо, поскольку нарушает одно из ограничений.

Среди бесконечного множества неотрицательных пар чисел (С, М), включая дробные значения, некоторые пары будут нарушать по крайней мере одно ограничение, а некоторые будут соответствовать всем ограничениям. В нашей модели приемлемы только неотрицательные решения, соответствующие всем ограничениям. Такие решения называются допустимыми.

Целевая функция для модели «Офисный интерьер»

Какое же из допустимых решений выбрать? Как уже отмечалось, каждая модель линейного программирования наряду с ограничениями содержит конкретную цель. Мы хотим максимизировать прибыль, это и есть цель модели. В данном случае у компании «Офисный интерьер» два источника прибыли.

1. Прибыль от продажи стульев «Boss» .
2. Прибыль от продажи стульев «Manager».

При перечислении основных производственных факторов отмечалось, что удельная прибыль составляет 1700 руб. для стульев «Boss» и 1200 руб. для «Manager». Тогда

1700С— прибыль от продажи С стульев «Boss» ,

1200М — прибыль от продажи М стульев «Manager».

Таким образом, решение произвести С стульев марки «Boss» и М стульев марки «Manager» приведет к получению суммарной прибыли, вычисляемой по формуле

$$\text{суммарная прибыль} = 1700C+1200M \qquad (7)$$

Заметим, что если известны только данные о доходах, единственное, что можно сделать — это максимизировать доход при соблюдении ограничений. Если же доступны только данные о затратах (себестоимости), то нужно минимизировать затраты, связанные с производством определенного ассортимента изделий. Однако когда известны и данные о доходах, и данные о затратах, предпочтительней максимизировать прибыль, а не просто доход.

Оптимальное решение

Среди бесконечного множества решений, удовлетворяющих всем ограничениям (т.е. среди допустимых решений), существует такое, которое обеспечивает наибольшую суммарную валовую прибыль. Это решение будем называть решением задачи, или оптимальным решением. Суммарная прибыль является функцией переменных С и М, поэтому выражение 1700С+1200М называется целевой функцией. Итак, надо найти допустимые значения С и М, которые оптимизируют (в нашем случае максимизируют) целевую функцию. В символической форме это можно записать следующим образом:

$$\text{максимизировать } 1700C+1200M,$$

или, еще короче:

$$\text{Max } (1700C+1200M). \tag{8}$$

Целевую функцию необходимо максимизировать только на множестве допустимых решений.

Исследование модели компании «Офисный интерьер»

В следующем разделе показано, как найти оптимальное решение для данной и других подобных моделей с помощью электронных таблиц, а также продемонстрированы возможности надстройки «Поиск решения». Однако сначала запишем полную формулировку задачи и сделаем на ее основании некоторые заключения.

В предшествующих разделах мы преобразовали словесное описание ситуации реального мира в символическую (математическую) модель, состоящую из целевой функции и ограничений. Эта модель называется моделью линейного программирования и имеет следующий вид:

$$\text{максимизировать } 1700C+1200M \text{ (целевая функция)}$$

при ограничениях

$8C + 4M \le 1280$ (ограничение для длинных штифтов);
$4C + 12M \le 1600$ (ограничение для коротких штифтов);
$C + M \ge 100$ (минимальный объем производства);
$4C + 4M \le 760$ (ограничение для ножек);
$C \le 140$ (ограничение для прочных сидений):
$M \le 120$ (ограничение для облегченных сидений);
$C \ge 0$ и $M \ge 0$ (условия неотрицательности).

Линейные функции

Заметьте, что в данной модели все функции ограничений, а также целевая функция являются линейными функциями двух переменных решения. График линейной функции двух переменных представляет собой прямую линию. В общем случае линейная функция — это такая функция, в которую каждая переменная вместе со своим коэффициентом входит в виде отдельного члена (т.е. переменные не умножаются, не делятся друг на друга, не возводятся в степень (отличную от 1), нет логарифмических, экспоненциальных или тригонометрических выражений и т.д.). Примером нелинейной функции может служить функция: $14C+12CM$, поскольку слагаемое $12CM$ содержит произведение переменных.

Функция $9C^2 + 8M$ также является нелинейной, так как переменная C возводится во вторую степень. Другой пример нелинейной функции: $9\text{Log}C+12C^2M$.

С математической точки зрения с нелинейными функциями работать значительно сложнее, чем с линейными. Сила и привлекательность линейного программирования заключается в простоте линейных связей (уравнений и неравенств) и в том, что менеджеры и аналитики могут использовать линейные модели в практических приложениях, почти не имея специальной математической подготовки. На данном этапе важно запомнить следующее.

1. В задаче линейного программирования всегда присутствуют целевая функция (которую необходимо максимизировать или минимизировать) и ограничения.

2. Все функции (целевая функция и ограничения) в моделях ЛП являются линейными.

О целочисленности решений

Посмотрим еще раз на формулировку задачи. Следует отметить, что если не наложить дополнительные ограничения, требующие, чтобы значения переменных решения были целыми, нам, скорее всего, придется рассматривать дробные решения. Для многих моделей ЛП, как и в данном случае, дробные значения переменных решения не имеют физического смысла. Например, решение произвести 3,12 стульев «Boss» и 6,88 стульев «Manager» реализовать невозможно. С другой стороны, для многих задач дробные значения, безусловно, имеют смысл (например, "произвести 98,65 галлонов бензина"). В тех случаях, когда дробные ответы смысла не имеют, существует четыре возможных выхода.

1. Добавить в модель ЛП так называемое условие целочисленности, которое требует, чтобы одна или несколько переменных решения принимали только целые значения. Это приведет к изменению модели, которая превратится в модель целочисленной оптимизации или целочисленного программирования.
2. Решать задачу как обычную задачу линейного программирования, а затем округлить (до ближайшего целого числа) все переменные решения, для которых дробные ответы невозможно реализовать. Однако во многих случаях эта простая и очевидная тактика может привести к недопустимым или неоптимальным решениям.
3. Можно считать, что результаты работы модели задают средний недельный уровень производства для периода из нескольких последующих недель. Например, решение произвести 70,5 стульев «Boss» и 80,25 стульев «Manager» можно реализовать следующим образом: согласно производственному плану еженедельно производится 70,5 стульев «Boss» , но 1) каждую первую неделю продается 70 стульев «Boss» , а половина стула переходит па следующую неделю как полуфабрикат, который следует закончить; 2) каждую вторую неделю продается 71 стул марки «Boss». Аналогично еженедельно производится 80,25 стульев марки «Manager», но 1) каждые три недели продается только 80 стульев этой марки, а все незаконченные части стула рассматриваются как полуфабрикат, и 2) каждую четвертую неделю продается 81 стул «Manager». Если следовать этим правилам, то среднее недельное производство для четырехнедельного периода действительно составит 70,5 «Boss» и 80,25 «Manager», как предписывается решением задачи ЛП.
4. Можно рассматривать результаты использования модели только как ориентиры для планирования, а не как оперативные решения, которые следует реализовывать. В таком случае эти результаты будут служить основой для принятия окончательного решения, которое неизбежно будет учитывать другие аспекты реальной ситуации, не нашедшие отражения в абстрактной модели ЛП. Весьма вероятно, что эти аспекты все равно приведут к отклонению окончательных решений от нецелочисленных решений, полученных с помощью модели ЛП. В таком случае решение, предложенное моделью ЛП, служит точкой отсчета при рассмотрении дополнительных соображений и является основой для анализа ситуации, для чего, собственно говоря, и разрабатываются модели.

Искусство создания моделей ЛП

Чтобы описать управленческую ситуацию в виде символической (математической) модели, полезно сначала составить "словесную модель". Это делается следующим образом

1. Описать словами цель и целевую функцию, т.е. показатель эффективности.
2. Дать словесное описание каждого ограничения, обращая особое внимание на то, является данное ограничение требованием и форме неравенств или равенством.
3. Шаги 1 и 2 приведут к словесному описанию переменных решения.

Очень важно правильно определить переменные решения. Иногда существует несколько возможных вариантов. Например, должны ли переменные решения представлять килограммы готовой продукции или килограммы сырья? В этом случае следует задать вопрос: "Какие решения нужно принять, чтобы оптимизировать целевую функцию?". Ответ на этот вопрос поможет правильно выявить переменные решения.

После выполнения пп. 1-3 следует присвоить обозначения (или имена) переменным решения. Затем необходимо выполнить такие действия.

4. Выразить все ограничения через обозначенные переменные решения.
5. Выразить с помощью обозначенных переменных целевую функцию.

На данном этапе следует проверить модель на соответствие единиц измерения. Например, если коэффициенты целевой функции даны в рублях за килограмм, то переменные решения, входящие в целевую функцию, должны выражаться в килограммах, а не в тоннах или центнерах. Аналогично нужно проверить соответствие единиц измерения в правой и левой частях каждого ограничения. Например, если налагается ограничение на число часов рабочего времени, то в правой части ограничения должны быть указаны часы рабочего времени. Тогда, если переменные решения измеряются в килограммах, то значения коэффициентов для данной функции ограничения (т.е. числовые коэффициенты перед каждой переменной решения в левой части ограничения) должны выражаться в часах рабочего времени, деленных на килограмм. Нельзя допускать, чтобы в одной части равенства или неравенства стояли часы, а в другой — минуты, секунды, килограммы или тонны.

Рассмотрим еще один аспект формирования модели ЛП. Как уже отмечалось, ограничения могут иметь форму неравенств типа "≤" или "≥". Студенты часто задают вопрос, бывают ли в модели линейного программирования ограничения в виде строгих неравенств типа "<" или ">". Ответ — нет. Причина этого имеет математическую природу: так делается для того, чтобы надлежащим образом сформулированная задача имела решение. Математическое доказательство данного утверждения не входит в нашу задачу. Однако не будет преувеличением сказать, что практически в любой реальной жизненной ситуации, в которой встречаются ограничения, неравенств типа "≤" или "≥" вполне достаточно, чтобы передать реальный смысл. Например, если переменная .Y должна быть < 15, то в модели вполне можно использовать ограничение $X \leq 14{,}9999999999$.

Обсудим теперь один из аспектов формирования моделей, который касается природы используемых стоимостных данных.

Невозвратные и переменные издержки

Во многих реальных задачах часто встречаются два типа издержек: невозвратные и переменные. Вопреки первому впечатлению невозвратные издержки не играют особой роли в оптимизации.

В оптимизационных моделях учитываются только переменные издержки.

Невозвратные издержки уже были сделаны, это означает, что никакие будущие решения не смогут повлиять на эти расходы. Предположим, было закуплено с последующей доставкой 400 и 250 кг алюминия двух сортов (1 и 2) по фиксированным ценам 150 руб. и 300 руб. за кг соответственно, и контракт уже оплачен. Задача состоит в том, чтобы определить, как оптимально использовать эти 650 кг алюминия, чтобы максимизировать прибыль, полученную от производства алюминиевых шарниров и трубок. С каждым из двух изделий связан доход и переменные затраты на его производство (затраты на механическую обработку, штамповку и т.д.). При формировании модели невозвратные затраты в 135000 руб. на закупку алюминия роли не играют. Эта сумма уже потрачена, следовательно, количество закупленного алюминия не является переменной решения. Переменными будут количества изделий, которые следует произвести, и для их определения нужно учитывать только переменные издержки. Сформулируем модель, соответствующую данному описанию. Пусть

К - количество производимых шарниров (переменная решения);
С - количество производимых трубок (переменная решения);
300 руб. - доход от продажи одного шарнира;
900 руб. - доход от продажи одной трубки;
120 руб. - затраты на производство шарнира (переменные издержки);
360 руб. - затраты на производство трубки (переменные издержки).

Для каждого продукта мы должны вычислить удельную валовую прибыль, т.е. разность между удельным доходом и удельными переменными издержками. Удельная валовая прибыль составляет:

для шарниров 300 - 120 = 180 руб.,
для трубок 900 - 360 = 540 руб.

Предположим, что для изготовления одного шарнира используется 0,5 кг алюминия 1 сорта и 1 кг алюминия 2 сорта. Для изготовления трубки требуется 1,5 кг алюминия 1 сорта и 2,5 кг 2 сорта. Получается следующая модель линейного программирования.

$$\text{Max } (180K + 540C)$$

при ограничениях

$0{,}5K + 1{,}5C \le 400$ (ограничение на количество алюминия 1 сорта);
$1{,}5K + 2{,}5C \le 250$ (ограничение на количество алюминия 2 сорта);
$K \ge 0$ и $C \ge 0$.

Чтобы показать независимость решения от невозвратных издержек, заметим, что целевая функция в нашей формулировке является суммарной валовой прибылью. Чистая прибыль вычисляется следующим образом:

чистая прибыль = валовая прибыль — невозвратные издержки =
$= 180K + 540C - 135000$.

Найти допустимые значения К и С, максимизирующие выражение

$$180K + 540C - 135000$$

все равно, что найти допустимые значения К и С, максимизирующие выражение

$$180K + 540C.$$

Константу 135000 можно игнорировать. Таким образом, если к оптимизируемой функции прибавить некую константу или умножить функцию на некоторое постоянное положительное число, результат оптимизации не изменится, т.е. оптимальные значения переменных решения останутся неизменными. Однако если прибавить (или отнять) одно и то же постоянное число ко всем коэффициентам переменных решения в целевой функции, результат может измениться.

Подведем итог. Невозвратные издержки в финансовых уравнениях влияют только на чистую прибыль. Они не отражаются на принятии решений, поскольку не связаны с будущими решениями, которые являются предметом моделирования. Поэтому можно убрать невозвратные издержки из целевой функции модели, при этом оптимальное решение не изменится.

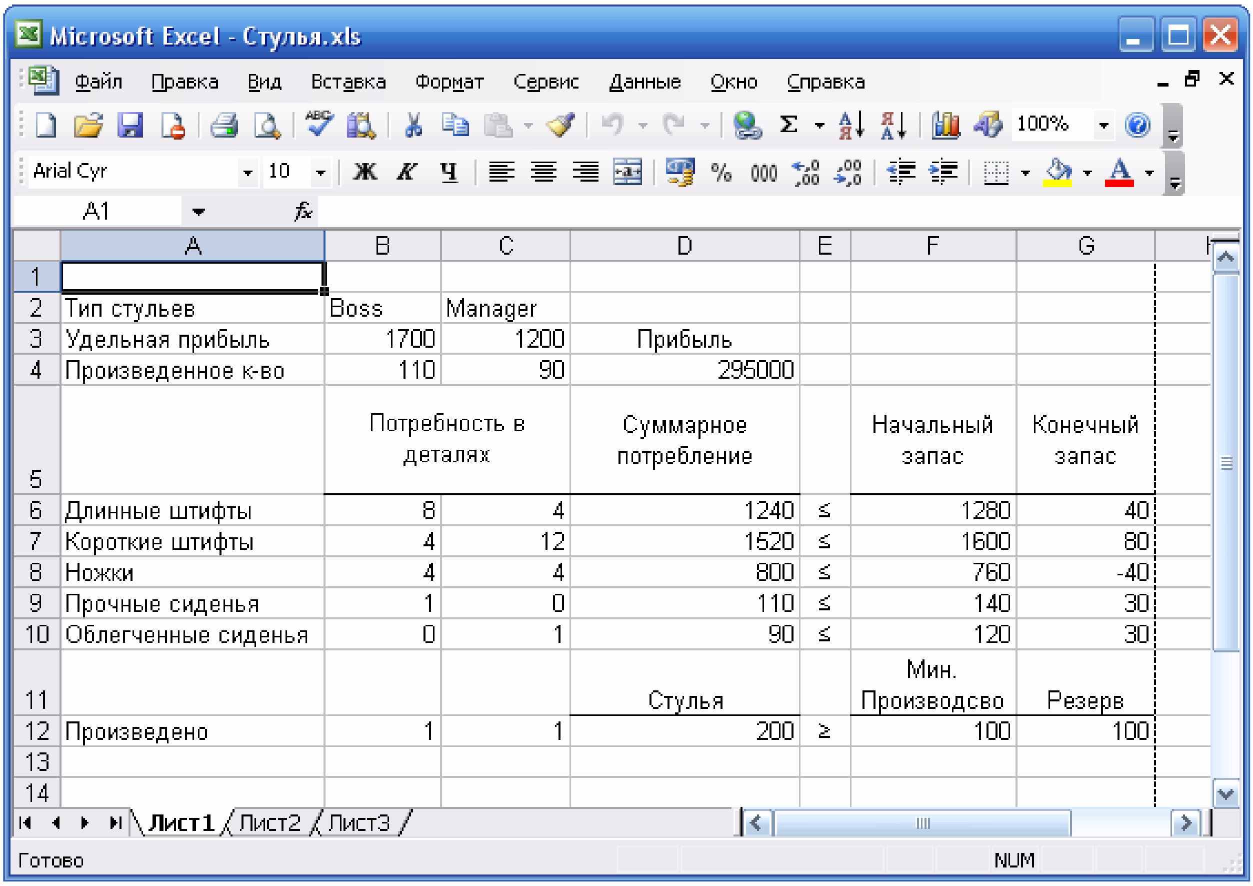
Табличная модель компании «Офисный интерьер»

Напомним, что модель ЛП недельного производства компании «Офисный интерьер» выглядит следующим образом (C — количество производимых стульев марки «Boss», а M — количество производимых стульев «Manager»).

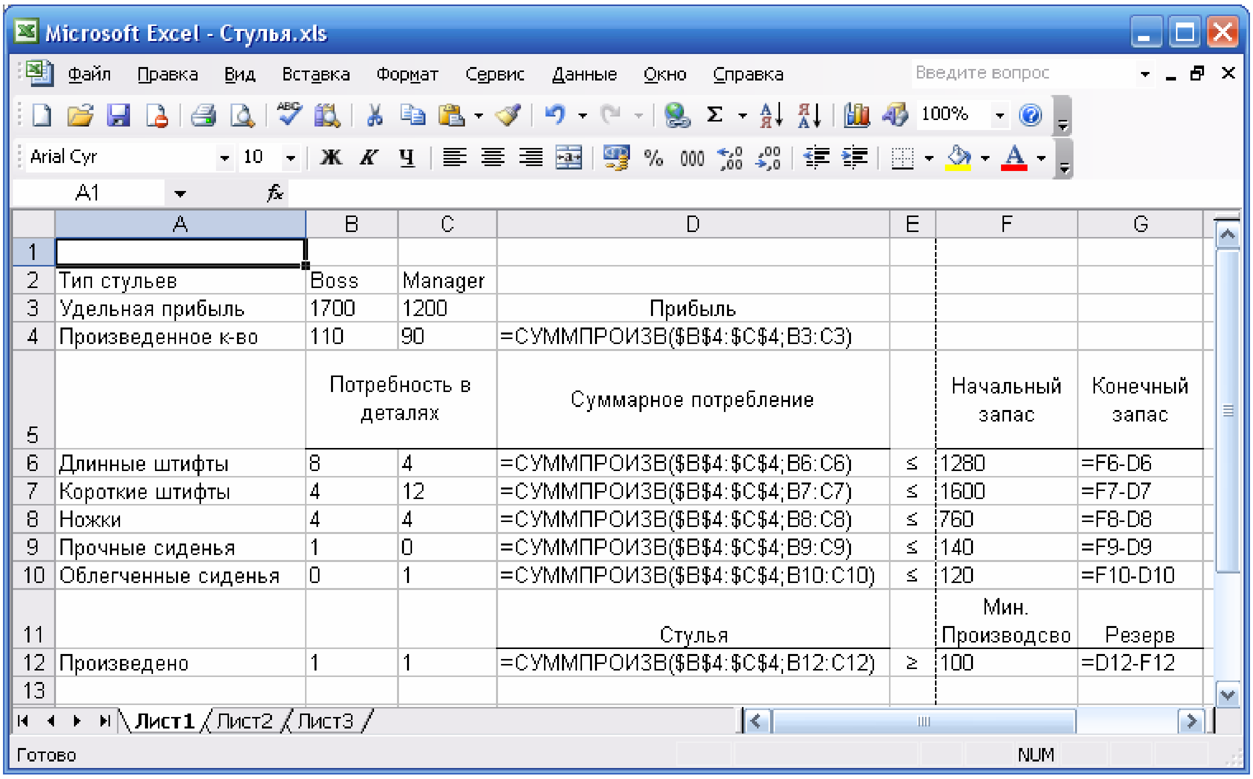
Максимизировать 1700C+1200M (целевая функция)

при ограничениях:
$8C + 4M \leq 1280$ (ограничение для длинных штифтов);
$4C + 12M \leq 1600$ (ограничение для коротких штифтов);
$4C + 4M \leq 760$ (ограничение для ножек);
$C \leq 140$ (ограничение для прочных сидений):
$M \leq 120$ (ограничение для облегченных сидений);
$C + M \geq 100$ (минимальный объем производства);
$C \geq 0$ и $M \geq 0$ (условия неотрицательности).

Обратите внимание на то, что ограничения были перегруппированы так, чтобы однотипные неравенства находились рядом. Причина такой группировки станет понятна при описании работы средства Excel «Поиск решения». Табличная версия модели, созданная в рабочей книге Excel Стулья.xls, представлена на рис. 1. Здесь показан случай, когда производится 110 стульев «Boss» и 90 стульев «Manager». Заметим, что при таком ассортименте нарушается ограничение для ножек — их требуется больше, чем имеется.



	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Тип стульев	Boss	Manager				
3	Удельная прибыль	1700	1200	Прибыль			
4	Произведенное к-во	110	90	295000			
5		Потребность в деталях		Суммарное потребление		Начальный запас	Конечный запас
6	Длинные штифты	8	4	1240	≤	1280	40
7	Короткие штифты	4	12	1520	≤	1600	80
8	Ножки	4	4	800	≤	760	-40
9	Прочные сиденья	1	0	110	≤	140	30
10	Облегченные сиденья	0	1	90	≤	120	30
11				Стулья		Мин. Производсво	Резерв
12	Произведено	1	1	200	≥	100	100
13							
14							



	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Тип стульев	Boss	Manager				
3	Удельная прибыль	1700	1200	Прибыль			
4	Произведенное к-во	110	90	=СУММПРОИЗВ($B$4:$C$4;B3:C3)			
5		Потребность в деталях		Суммарное потребление		Начальный запас	Конечный запас
6	Длинные штифты	8	4	=СУММПРОИЗВ($B$4:$C$4;B6:C6)	≤	1280	=F6-D6
7	Короткие штифты	4	12	=СУММПРОИЗВ($B$4:$C$4;B7:C7)	≤	1600	=F7-D7
8	Ножки	4	4	=СУММПРОИЗВ($B$4:$C$4;B8:C8)	≤	760	=F8-D8
9	Прочные сиденья	1	0	=СУММПРОИЗВ($B$4:$C$4;B9:C9)	≤	140	=F9-D9
10	Облегченные сиденья	0	1	=СУММПРОИЗВ($B$4:$C$4;B10:C10)	≤	120	=F10-D10
11				Стулья		Мин. Производсво	Резерв
12	Произведено	1	1	=СУММПРОИЗВ($B$4:$C$4;B12:C12)	≥	100	=D12-F12
13							

Рис. 1. Модель ЛП производства компании «Офисный интерьер»

*Совет. Наиболее простой способ ввода символов неравенства, таких как ≤ в ячейке E6, состоит в том, чтобы ввести в ячейку символ <, а затем щелкнуть мышью на кнопке **Подчеркнутый** на панели инструментов форматирования Excel.*

Коэффициенты и переменные решения

Многие ячейки рабочего листа содержат числа. Эти числа представляют

1) числовые значения коэффициентов и правых частей неравенств, они называются параметрами данной модели ЛП;
2) числовые значения двух переменных решения. Они называются значениями решений или просто решениями.

Формулы

Формулы в Excel используются для вычисления значений целевой функции, функций ограничений и левых частей неравенств (записаны в столбце D). В некоторых случаях используются вспомогательные формулы, с помощью которых вычисляются числовые значения различных коэффициентов модели. Таким образом, числовые значения одних коэффициентов вводятся непосредственно, а других — вычисляются по формулам.

Вычисление резерва

За исключением ячеек G11 и G12, все элементы таблицы имеют очевидный смысл. Осталось объяснить, что представляет собой элемент под названием «Резерв» в ячейке G12.

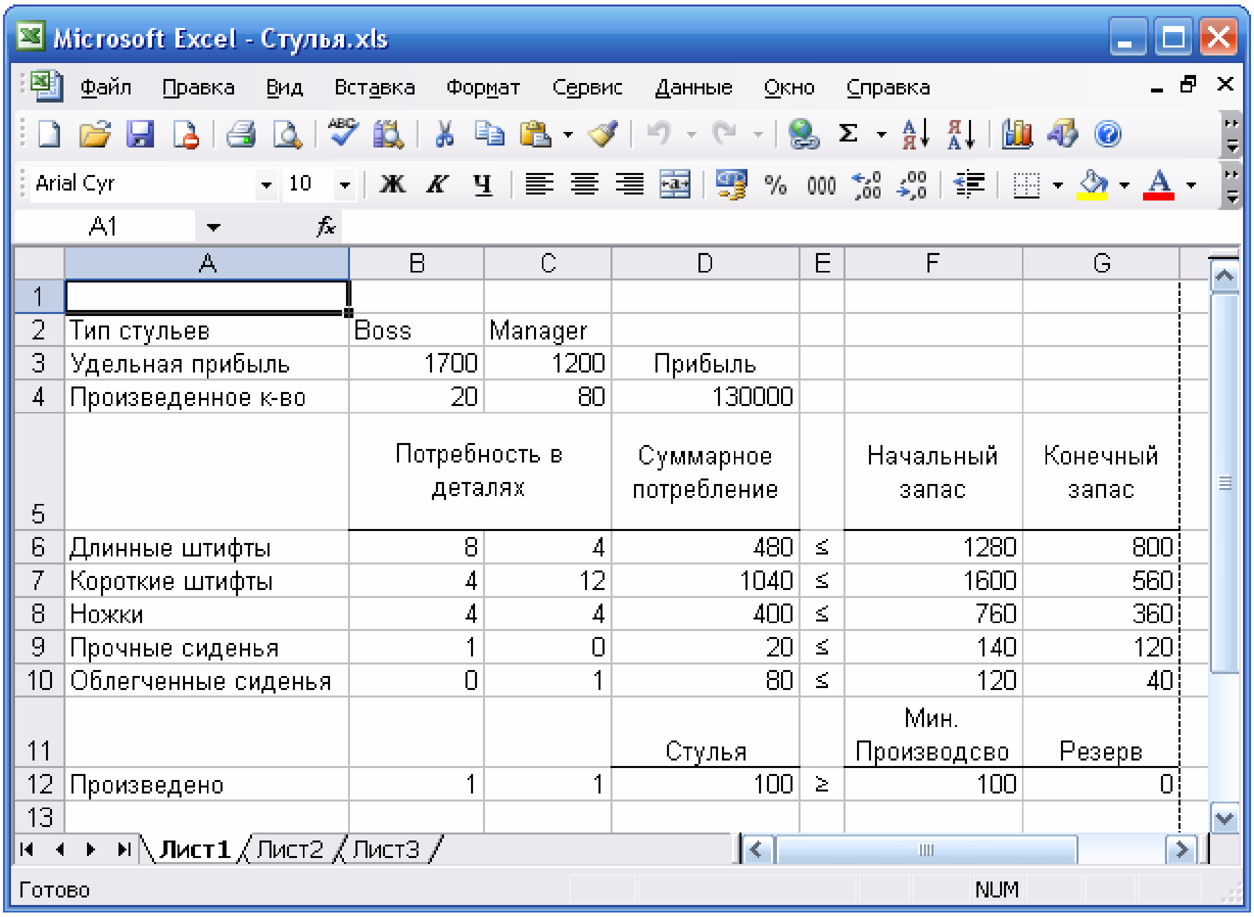
В моделях ЛП термином резерв обозначается неотрицательная разность функции ограничения и его правой части.

Часто предпочтительней использовать более содержательные названия (чем "резерв"), например «***Конечный запас***» (т.е. запас на конец недели, как в ячейке G5). Более того, вычисления в столбце G однотипны. Их назначение — показать, насколько близко значение функции ограничения к значению правой части неравенства, при этом нулевой резерв свидетельствует о том, что в ограничении достигнуто равенство. Например, формула =F6-D6 в ячейке G6 соответствует ограничению для длинных штифтов $8C + 4M \leq 1280$. Здесь из правой части данного ограничения вычитается левая часть. Таким образом, значение запаса на конец периода (или "резерв" для данного ограничения) — это количество неиспользованных длинных штифтов. Однако в ячейке G12, соответствующей ограничению $C+M \geq 100$, записана формула "левая часть ограничения минус правая часть"; такой порядок вычитания обусловлен тем, что резерв должен быть неотрицательной величиной для допустимых решений. Итак, сформулируем следующее правило.

- Для ограничений типа $\leq$ при вычислении резерва из правой части неравенства вычитается левая часть.
- Для ограничений типа $\geq$ при вычислении резерва из левой части неравенства вычитается правая часть.

Хотя вычисление резерва и не является обязательным, оно очень полезно. Например, сразу становится очевидным, что производственный план на рис. 1 недопустим, поскольку запас на конец периода в ячейке G8 получился отрицательным.

Один из очевидных способов использования полученной модели компании «Офисный интерьер» — проведение анализа "Что-если" для различных решений (т.е. различных значений производства стульев «Boss» и «Manager»). Для этого следует ввести соответствующие значения в ячейки B4 и C4 и просмотреть значения в ячейке D4, представляющие недельную валовую прибыль. При этом нужно следить, чтобы значения резерва в ячейках G6:G12 были неотрицательными. Если ввести в ячейку B4 значение 20, а в ячейку C4 значение 80 (что означает $C = 20$, $M = 80$), то результирующая таблица будет выглядеть так, как показано на рис. 2.



	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Тип стульев	Boss	Manager				
3	Удельная прибыль	1700	1200	Прибыль			
4	Произведенное к-во	20	80	130000			
5		Потребность в деталях		Суммарное потребление		Начальный запас	Конечный запас
6	Длинные штифты	8	4	480	≤	1280	800
7	Короткие штифты	4	12	1040	≤	1600	560
8	Ножки	4	4	400	≤	760	360
9	Прочные сиденья	1	0	20	≤	140	120
10	Облегченные сиденья	0	1	80	≤	120	40
11				Стулья		Мин. Производсво	Резерв
12	Произведено	1	1	100	≥	100	0
13							

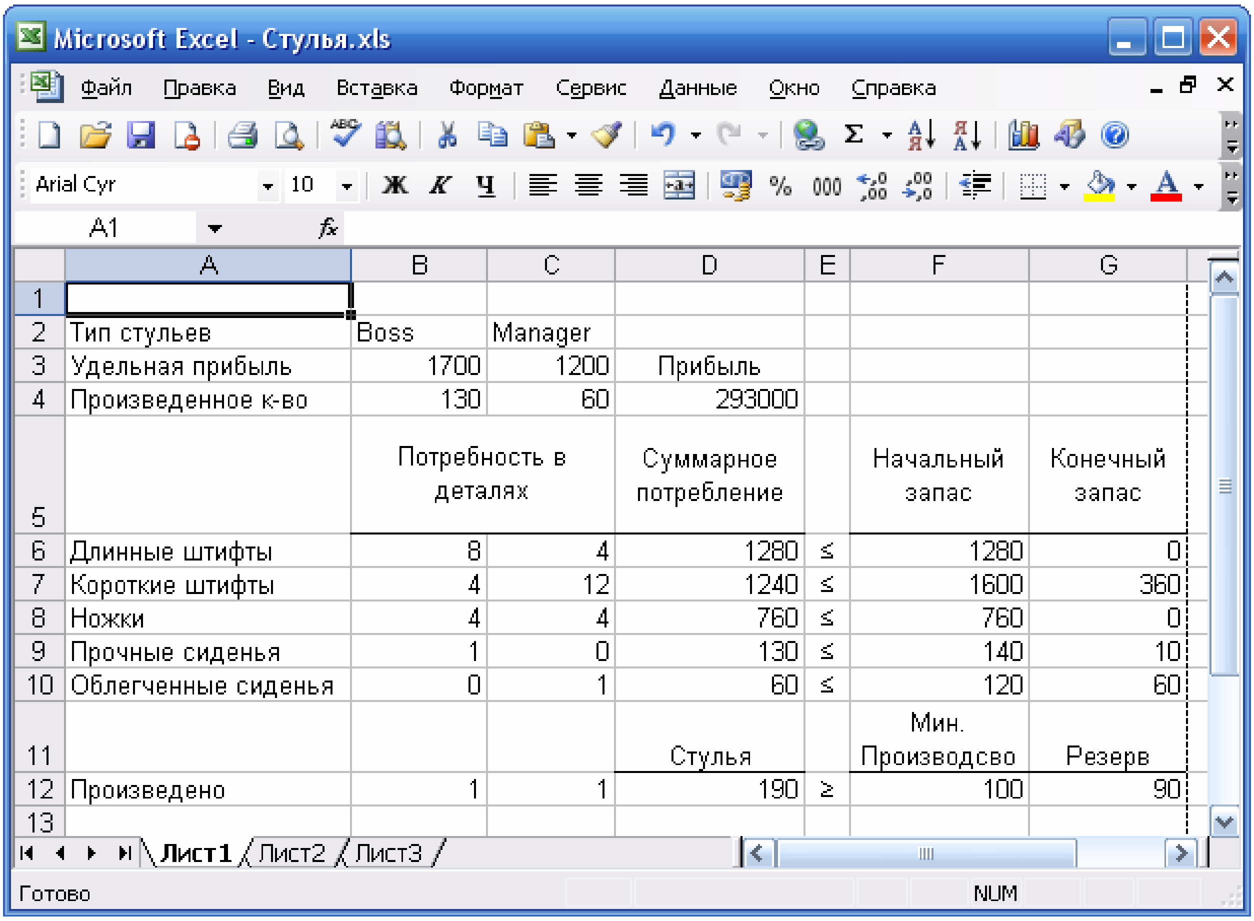
Рис. 2. Модель производства компании «Офисный интерьер» для *C=20 и M=80.*

Совет, Как вы увидите, знаки неравенств в столбце E, разделяющие значения левых и правых частей ограничений, не используются при работе со средством ***Поиск решения*** *и поэтому не являются обязательными. Однако их использование помогает при формализации модели.*

Используя рабочую книгу Стулья.xls, попробуйте, подставляя различные значения переменных C и M, получить максимальную прибыль. Вы скоро поймете, что найти наибольшую прибыль, не нарушая ограничений, непростая задача даже для такой упрощенной модели.

Поиск оптимального решения

Средство ***Поиск решения*** позволяет найти оптимальное решение в любой модели линейного программирования с помощью нескольких щелчков кнопкой мыши. На рис. 3 показано оптимальное решение для упрощенной модели компании «Офисный интерьер».



	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Тип стульев	Boss	Manager				
3	Удельная прибыль	1700	1200	Прибыль			
4	Произведенное к-во	130	60	293000			
5		Потребность в деталях		Суммарное потребление		Начальный запас	Конечный запас
6	Длинные штифты	8	4	1280	≤	1280	0
7	Короткие штифты	4	12	1240	≤	1600	360
8	Ножки	4	4	760	≤	760	0
9	Прочные сиденья	1	0	130	≤	140	10
10	Облегченные сиденья	0	1	60	≤	120	60
11				Стулья		Мин. Производсво	Резерв
12	Произведено	1	1	190	≥	100	90
13							

Рис. 3. Значения C и M, приносящие максимальную прибыль.

Модель ЛП и ее представление в электронных таблицах

Итак, у нас есть два представления модели производства компании «Офисный интерьер»: символическая (математическая) модель ЛП и ее представление в электронной таблице, которую будем называть табличной моделью.

Для создания "правильной" модели линейного программирования в Excel данный процесс лучше разбить на три этапа.

1. **Написание и проверка символической модели ЛП.** Модель записывается на бумаге в математическом виде; это не займет много времени и поможет при

отладке окончательного варианта табличной модели в Excel. Затем анализируются формулировки математической задачи с целью выявления возможных логических ошибок.

2. **Создание и отладка табличной модели ЛП.** На основе символической модели ЛП создается ее представление в Excel. Затем производится проверка полученной табличной модели путем задания различных значений переменных решения с целью выявить возможные очевидные ошибки (например, для заведомо допустимых решений нарушаются ограничения, значения в ячейках левых частей или критерий эффективности оказываются лишенными смысла и т.д.).
3. **Попытка оптимизации модели с помощью надстройки Поиск решения.** Если модель некорректно сформирована, результатом чаще всего будет сообщение об ошибке, Тогда нужно исправить модель, возможно, вернувшись к первому этапу.

Для правильного построения моделей предлагаются следующие рекомендации по созданию табличной модели ЛП в Excel.

- Каждая переменная решения располагается в отдельной ячейке, ячейки группируются по строкам или столбцам; каждому ограничению отводится отдельная строка или столбец таблицы. (Чаше всего переменные решения расположены в столбцах, а ограничения — в строках.)
- Переменные решения группируются в отдельный блок столбцов/строк; аналогично ограничения группируются в свой блок строк/столбцов.
- Все ячейки, содержащие переменные решения и целевую функцию, имеют заголовки в верхней части своего столбца, а все ограничения имеют заголовки в крайней слева ячейке своей строки.
- Коэффициенты целевой функции хранятся в отдельной строке, располагаясь непосредственно под или над соответствующими переменными решения; формула для вычисления целевой функции находится в соседней ячейке.
- Чтобы модель была понятней, ячейки с переменными решения и целевой функцией выделяются рамкой по границе ячеек или заливкой ячеек.
- Коэффициент перед определенной переменной решения в каком-либо ограничении записывается в ячейку на пересечении столбца (строки), содержащего данную переменную решения, и строки (столбца), содержащей это ограничение.
- В каждой строке ограничений за ячейками, содержащими коэффициенты данного ограничения, следует ячейка, в которую записано вычисленное значение функции ограничения (значение левой части неравенства), за ней следует ячейка, в которой стоит соответствующий знак неравенства, а затем ячейка, содержащая значение правой части неравенства. Дополнительно может включаться ячейка с формулой вычисления резерва, т.е. разности между значениями левой и правой частей неравенства, вычисляемой таким образом, чтобы она была неотрицательной при соответствии ограничению.
- Ячейки, содержащие правые части ограничений, должны включать константы или формулы, в которые не входят переменные решения, — все формулы в правой части, прямо или косвенно связанные с переменными решения, должны быть перенесены в левую часть с помощью алгебраических преобразований данного неравенства.
- Не следует использовать в формулах модели ЛП нелинейные функции. Такие функции могут использоваться в формулах рабочего листа, но только в том случае, если они не влияют (прямо | или косвенно) на вычисление целевой функции.
- Условия неотрицательности переменных решения не обязательно включать в табличную модель. Как правило, они опускаются и указываются непосредственно в диалоговом окне средства ***Поиск решения***.

Одним из результатов выполнения этих рекомендаций является то, что все основные коэффициенты модели содержатся в отдельных ячейках, поэтому их легко изменять, не меняя формул модели. Кроме того, группирование переменных решения и ограничений позволяет копировать формулы для создания аналогичных формул. Благодаря группированию также упрощается работа со средством ***Поиск решения***, поскольку для указания переменных решения или ограничений можно использовать диапазоны ячеек рабочего листа.

Надстройка Поиск решения

Поиск решения — это надстройка, входящая в поставку Excel, предназначенная для оптимизации моделей при наличии ограничений, в том числе моделей линейного программирования. Для этого в надстройке используются методы и алгоритмы математического программирования, которые позволяют находить оптимальные решения для табличных моделей. Для задач линейного программирования ***Поиск решения*** использует эффективный оптимизационный алгоритм (он подходит только для моделей ЛП) под названием симплекс-метод.

Средство ***Поиск решения*** позволяет оптимизировать линейные и нелинейные модели. Помните, что в оптимизируемой линейной модели все формулы, которые непосредственно содержат переменные решения и прямо или косвенно влияют на формулу, по которой вычисляется целевая функция, должны быть линейными. Линейность модели позволяет использовать в средстве ***Поиск решения*** алгоритм симплекс-метода, который правильно работает только для формул, отображающих линейные взаимосвязи между переменными.

Использование надстройки Поиск решения

Надстройка ***Поиск решения*** состоит из двух программных компонентов. Первая — это встроенная в Excel программа, написанная на языке Visual Basic, которая транслирует представленную на рабочем листе информацию во внутреннее представление, используемое второй программой. Вторая программа находится в памяти компьютера в виде отдельного программного модуля; именно она выполняет оптимизацию и возвращает найденное решение первой программе, которая, в свою очередь, обновляет данные на рабочем листе. Эти две программы взаимодействуют при помощи внутреннего интерфейса прикладных программ. Когда выбирается команда ***Поиск решения*** в меню Excel ***Сервис***, происходит обращение к первой программе надстройки ***Поиск решения***, которая подготавливает таблицу к оптимизации и вызывает вторую программу-оптимизатор.

Надстройка ***Поиск решения***, хотя и входит в поставку Excel, не подключается автоматически к этой программе.

Для ***MS Excel 2003:*** Если в меню ***Сервис*** вы не находите команды ***Поиск решения***, значит, надстройка не подключена. Для ее подключения выполните команду ***Сервис/Надстройки*** и в открывшемся диалоговом окне ***Надстройки*** установите флажок перед опцией ***Поиск решения***.

Для ***MS Excel 2007(2010):*** Если в закладке ***Данные,*** панель ***Анализ*** вы не находите команды ***Поиск решения***, значит, надстройка не подключена. Для ее подключения выполните команду меню ***Файл/Параметры*** и в открывшемся диалоговом выберете ***Надстройки*** и кнопку «***Перейти…***». Установите флажок перед опцией ***Поиск решения***.

Таким образом, использование надстройки ***Поиск решения*** состоит из следующих действий.

1. Откройте Excel и выполните обычные операции по созданию табличной модели. Можно создать несколько сценариев анализа "Что-если" для проверки модели.

2. После отладки модели переходите к этапу оптимизации, выбрав команду ***Поиск решения*** в меню ***Сервис***.

Рис. 4. Этапы работы с надстройкой Поиск решения.

3. В открывшемся диалоговом окне ***Поиск решения*** укажите данные, необходимые для процесса оптимизации.

4. После задания необходимых данных (в какой ячейке содержится формула оптимизируемой целевой функции, какие ячейки включают переменные решения и т.д.) щелкните на кнопке ***Выполнить***.

5. Поиск решения выполняет процесс оптимизации. Для небольших моделей ЛП современный персональных компьютер тратит на это всего несколько секунд, но для очень больших моделей процесс может длиться несколько минут и дольше.

6. Если в табличной модели нет ошибок, Поиск решения выведет на экран диалоговое окно ***Результаты поиска решения***, где можно указать, обновить ли исходную модель (т.е. занести ли в ячейки значения оптимального решения) и создавать ли отчет (который впоследствии можно распечатать).

7. После этого можно продолжить выполнение анализа "Что-если", чтобы провести анализ чувствительности оптимального решения.

Последовательность работы с надстройкой ***Поиск решения*** схематично показана на рис. 4.

Терминология средства Поиск решения

После общего описания работы со средством ***Поиск решения*** вернемся к тому, какие инструкции нужно дать программе, чтобы она оптимизировала модель линейного программирования. Но сначала нужно разобраться в терминологии, которую использует это средство при оптимизации моделей ЛП, Применение специальной терминологии вызвано тем, что средство ***Поиск решения*** воспринимает только ячейки электронной таблицы, а не символическое представление моделей ЛП. С другой стороны, эти отличия чисто номинальные. Соответствие между терминами, используемыми в моделях ЛП и средстве ***Поиск решения***, показано в таблице 4.

Таблица 4. Терминология, используемая в надстройке ***Поиск решения***

Термины моделей ЛП	Термины средства Поиск решения
Целевая функция	Целевая ячейка
Переменные решения	Изменяемые ячейки
Ограничения	Ограничения
Функции ограничения (левая часть неравенств ограничений)	Адреса ячеек, содержащих функции ограничения
Правая часть неравенств ограничений	Ограничение или граница

Существует еще одно обстоятельство, о котором необходимо помнить при работе с моделями ЛП. Часто отрицательные решения, например, отрицательное значение количества производимых стульев в модели «Офисный интерьер» и тому подобное, не имеют смысла, тогда на переменные решения налагается ограничение неотрицательности. Поскольку эти ограничения очевидны, их, как правило, не перечисляют в табличной модели ЛП. Однако при использовании средства ***Поиск решения*** условия неотрицательности переменных решения необходимо указывать — их пропуск является распространенной ошибкой.

Оптимизация модели «Офисный интерьер»

Научиться работать с надстройкой ***Поиск решения*** лучше всего непосредственно за компьютером. Как показано на рис. 4, первым делом нужно загрузить Excel и открыть рабочую книгу Стулья.xls, содержащую упрошенную табличную модель «Офисный интерьер». После этого с помощью команды ***Сервис/Поиск решения*** вызывается средство Поиск решения, как показано на рис. 5.

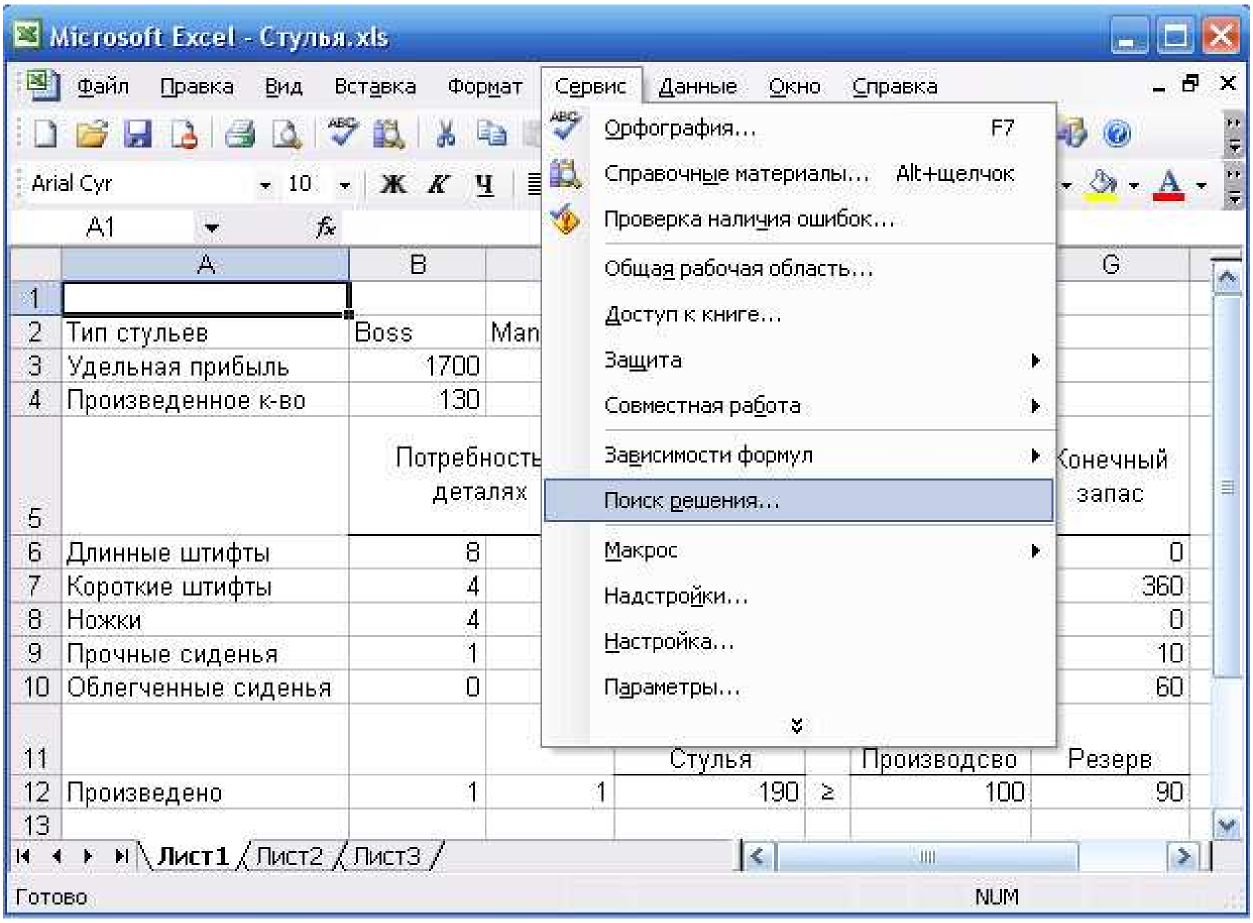


*Рис. 5. Выбор команды **Поиск решения**.*

После того как надстройка ***Поиск решения*** загрузится и память, на экране должно появиться диалоговое окно, показанное на рис. 6. Заметьте, что по умолчанию средство ***Поиск решения*** настроено на модель максимизации, а курсор в этом диалоговом окне находится в поле ***Установить целевую ячейку***.

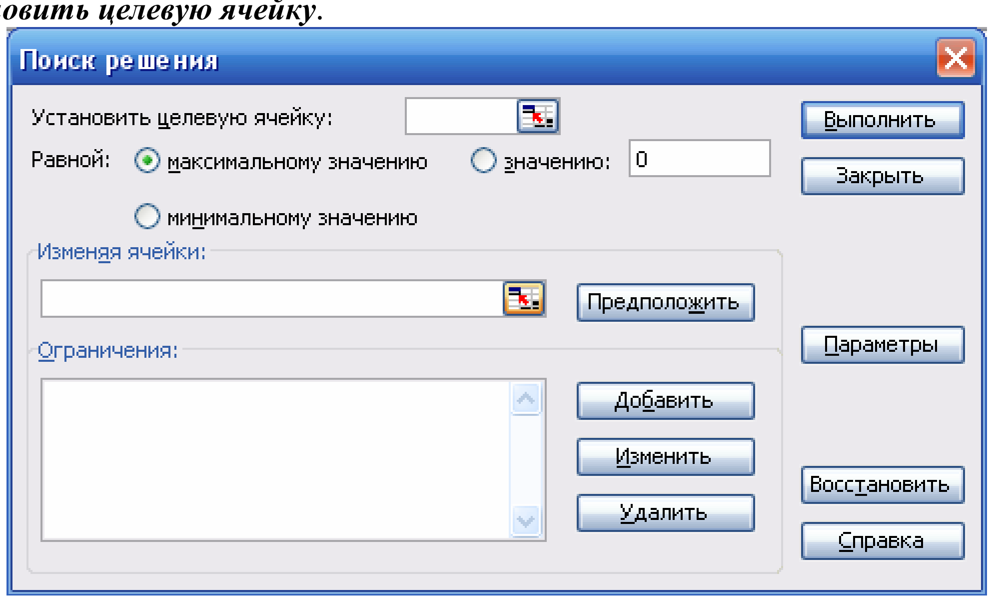


*Рис. 6. Диалоговое окно команды **Поиск решения**.*

В поле ***Установить целевую ячейку*** диалогового окна ***Поиск решения*** вводится адрес ячейки, содержащей значение целевой функции. Для модели «Офисный интерьер» в это поле следует ввести D4, но лучше щелкнуть указателем мыши на этой ячейке, чтобы ввести ее адрес автоматически, как показано на рис. 7. Если адрес ячейки вводится с помощью щелчка на ячейке, Excel добавляет символы $, которые указывают на абсолютную адресацию. Можно использовать как абсолютные адреса, так и относительные (если вводить адрес ячейки вручную). В любом случае результаты будут одинаковыми.

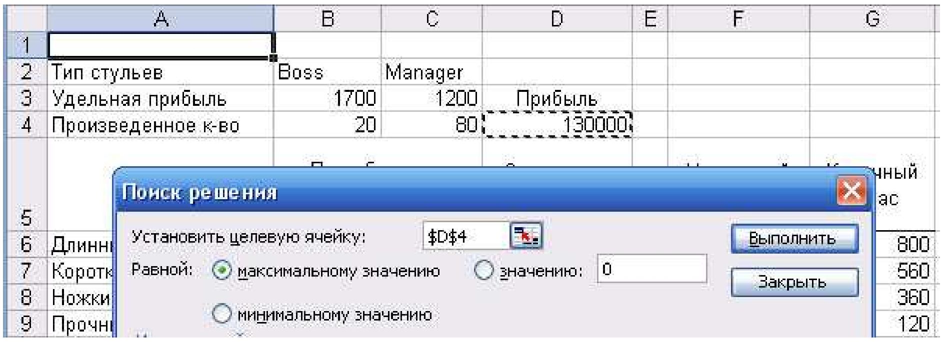


Рис. 7. Указание целевой ячейки.

Совет. Если щелкнуть мышью на расположенной справа в поле ввода кнопке, диалоговое окно свернется так, что будет отображаться только текущее поле. Это позволяет видеть большую часть рабочего листа и удобно производить выбор ячеек. Чтобы вновь развернуть диалоговое окно, нужно нажать клавишу <Enter> или еще раз щелкнуть на кнопке, расположенной справа в поле ввода.

Опции области ***Равной*** диалогового окна ***Поиск решения*** позволяют задать тип оптимизации. В данном случае необходимо максимизировать значение показателя эффективности, т.е. прибыль компании «Офисный интерьер». Для этого нужно щелкнуть на переключателе ***максимальному значению***. Щелчок на кнопке ***минимальному значению*** укажет, что надо минимизировать целевую функцию (например, если показателем эффективности модели являются суммарные затраты). Можно также сделать значение целевой функции равным заданному числу, установив переключатель ***значению*** и введя это число.

Следующее поле ***Изменяя ячейки*** позволяет указать переменные решения модели, в данном случае это диапазон B4:C4. Чтобы ввести их в данное поле, нужно щелкнуть на этом поле, а затем выделить на рабочем листе ячейки B4:C4 (рис. 8). (Можно попробовать воспользоваться кнопкой ***Предположить***, но при этом обычно предлагаются неверные адреса ячеек переменных решения.)

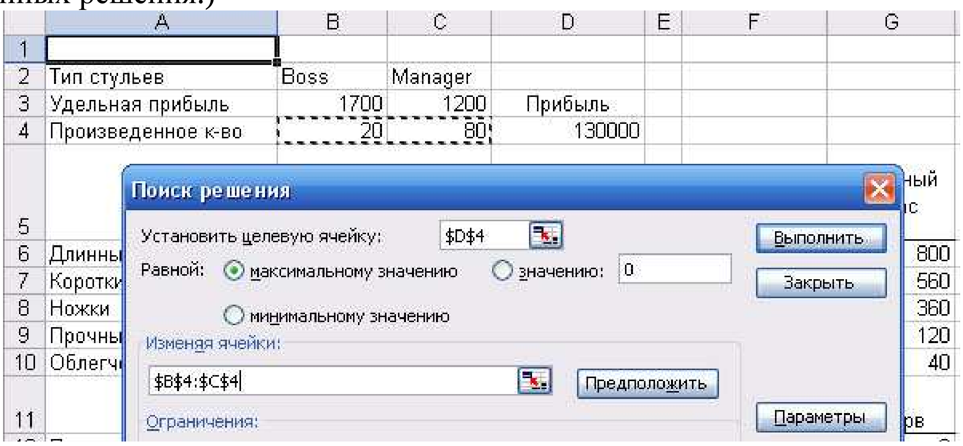


Рис. 8. Указание изменяемых ячеек.

Теперь необходимо задать для средства ***Поиск решения*** ограничения. Щелчок на кнопке ***Добавить*** открывает диалоговое окно ***Добавление ограничения***, которое позволяет вводить ограничения, как показано на рис. 9. По умолчанию предполагается, что ограничение имеет вид неравенства со знаком $\le$.

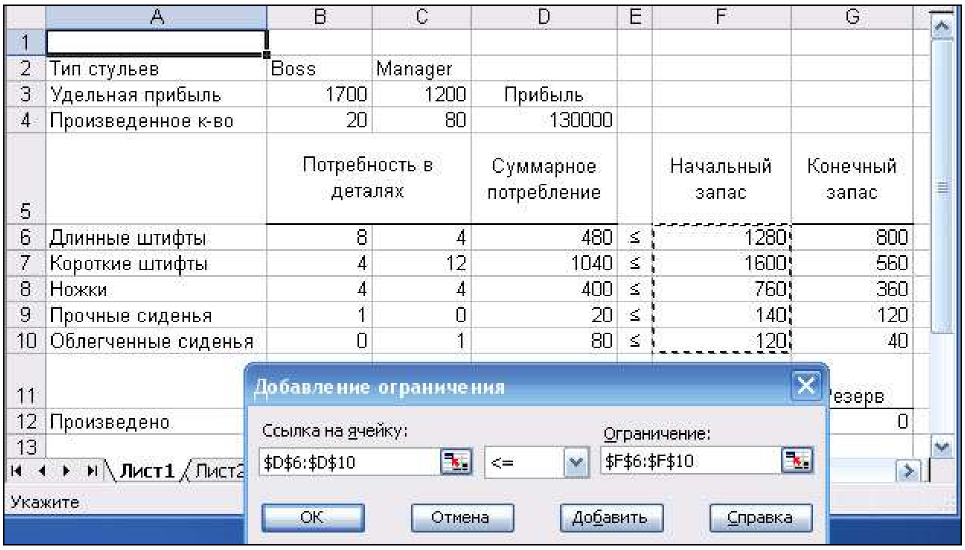


Рис. 9. Добавление ограничений.

Если модель организована так, что неравенства одного знака расположены рядом, то их можно ввести все вместе, используя диапазоны ячеек. В противном случае придется вводить ограничения по отдельности, щелкая на кнопке ***Добавить*** диалогового окна ***Добавление ограничения***.

Рассмотрим подробно, как задаются ограничения путем указания диапазона ячеек. Сначала в диалоговом окне ***Добавление ограничения*** курсор находится слева в поле ***Ссылка на ячейку***. Нужно выделить ячейки рабочего листа, содержащие суммы левых частей пяти ограничений вида "$\le$", т.е. диапазон D6:D10. Заметим, что в поле ***Ссылка на ячейку*** нельзя вводить формулы — это должны быть ссылки на ячейки, которые, в свою очередь, могут содержать формулы.

Затем курсор переходит в правое поле ввода диалогового окна ***Добавление ограничения***, и в это поле помещаются адреса пяти ячеек, содержащих соответствующие правые части ограничений, т.е. диапазон F6:F10, как показано на рис. 9. Выполнив одно действие, мы в действительности задали пять ограничений. Нужно следить, чтобы адресов ячеек левых частей было ровно столько, сколько и адресов правых частей. После этого щелкните на кнопке ***Добавить*** диалогового окна ***Добавление ограничения***, чтобы ввести эти ограничения в спецификацию ***Ограничения*** диалогового окна ***Поиск решения*** и очистить поля диалогового окна ***Добавление ограничения*** для ввода следующих ограничений.

Теперь введем ограничения вида "$\ge$". Процедура их ввода такая же, как и для ограничений вида "$\le$". Курсор находится слева в поле ***Ссылка на ячейку***, щелкаем на ячейке, содержащей левую часть ограничения, т.е. на ячейке D12. В списке поля ввода диалогового окна ***Добавление ограничения*** выбираем знак больше или равно >=, как показано на рис. 10. Обратите внимание на то, что в этом списке можно выбрать любой знак неравенства (<=, =, >=). После этого помещаем курсор в правое поле ввода диалогового окна ***Добавление ограничения*** и щелкаем на ячейке F12. Введенное ограничение должно выглядеть так, как показано на рис. 10.

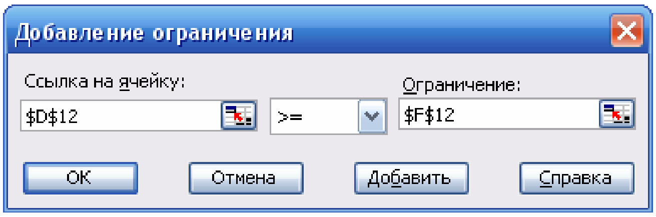


Рис. 10. Добавление ограничений.

Далее надо не забывать об условиях неотрицательности для содержимого ячеек B4 и C4. Чтобы ввести эти ограничения, сначала следует вернуться в диалоговое окно ***Поиск решения*** из диалогового окна ***Добавление ограничения***, щелкнув на кнопке ***ОК*** в этом окне. (Если вы случайно щелкнули на кнопке ***Добавить***, щелкните на кнопке ***Отмена***, и вы вернетесь в диалоговое окно ***Поиск решения***.) На данном этапе диалоговое окно ***Поиск решения*** для модели должно выглядеть так, как показано на рис. 11.

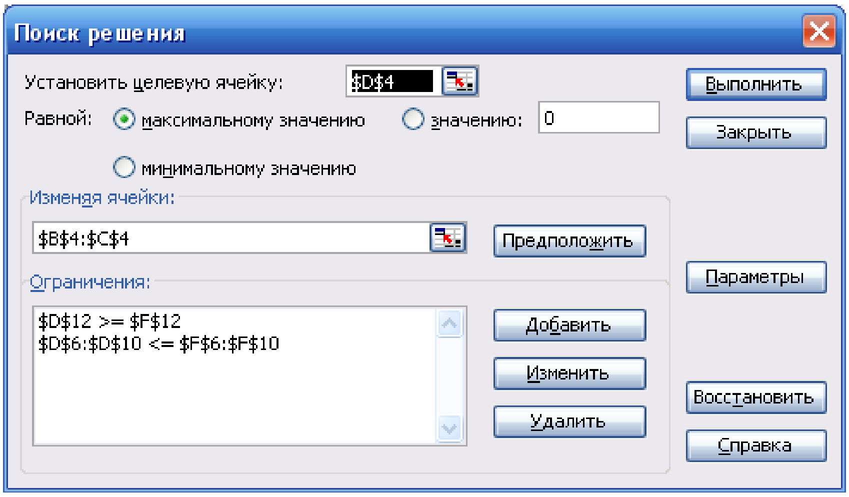


Рис. 11. Поиск решения для модели «Офисный интерьер».

Чтобы определить условия неотрицательности для переменных решения, необходимо щелкнуть на кнопке ***Параметры*** диалогового окна ***Поиск решения***. Появится диалоговое окно ***Параметры поиска решения*** (рис. 12).

Наконец, поскольку мы работаем с линейной моделью, в диалоговом окне ***Параметры поиска решения*** необходимо установить флажок опции ***Линейная модель***, а также ***Неотрицательные значения*** и ***Автоматическое масштабирование***. Первая из них сообщает программе, что модель является линейной, вторая налагает ограничения неотрицательности на переменные решения. Остальные опции этого окна мы пока рассматривать не будем — они в основном относятся к оптимизации целочисленных и нелинейных моделей. Щелкните на кнопке ОК, чтобы вернуться в диалоговое окно ***Поиск решения***.

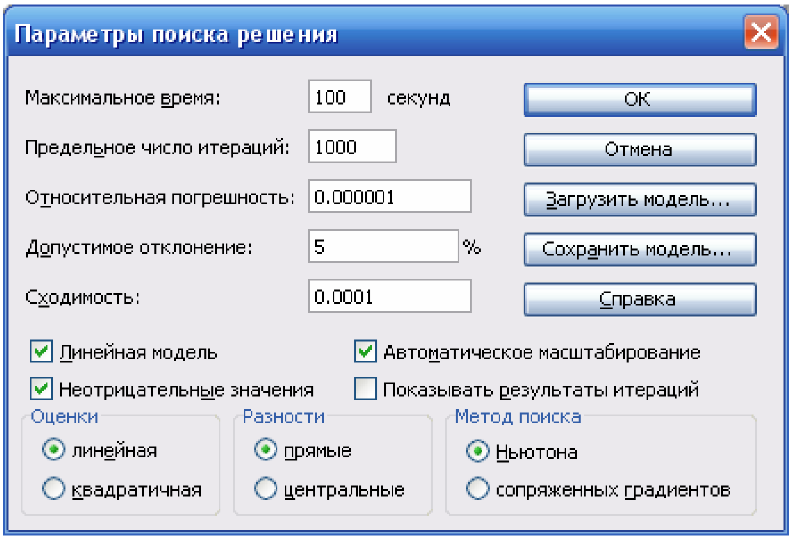


Рис. 12. Параметры Поиска решения для модели «Офисный интерьер».

Итак, полностью завершена спецификация оптимизационной модели. Мы ввели следующую информацию:

- адрес ячейки, содержащей целевую функцию, которую необходимо оптимизировать (в данном случае максимизировать);
- диапазон ячеек, которые программа должна изменять (переменные решения);
- ограничения;
- указание, что модель является моделью линейного программирования.

Теперь в диалоговом окне ***Поиск решения*** щелкните на кнопке ***Выполнить***. За тем, как продвигается поиск решения, можно наблюдать и строке состояния в левом нижнем углу окна ***Excel***. Однако для такой маленькой модели, как наша, оптимизация завершится очень быстро, за это время можно и не увидеть сообщения, поступающие от программы. В общем случае в процессе вычислений в строке состояния показывается число итераций и значения целевой функции при переборе множества допустимых решений задачи. Эта информация позволяет следить, как продвигается процесс оптимизации больших моделей, где он может длиться достаточно долго.

Диалоговое окно ***Результаты поиска решения*** сообщает о завершении поиска (рис. 13). То, что программа ***Поиск решения*** завершила работу, не означает, что она нашла оптимальное решение. Поэтому всегда читайте сообщение, отображаемое в верхней части данного окна! Если поспешить щелкнуть на кнопке ОК, чтобы убрать диалоговое окно ***Результаты поиска решения***, не прочитав данное сообщение, можно пропустить важную информацию о решении. Если оптимальное решение найдено, в диалоговом окне ***Результаты поиска решения*** должно присутствовать два ключевых предложения.

- Решение найдено.
- Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Если хотя бы одного из этих предложений нет, программе не удалось оптимизировать модель.

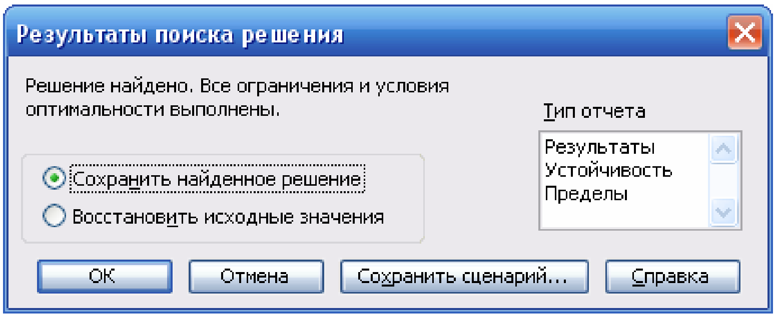
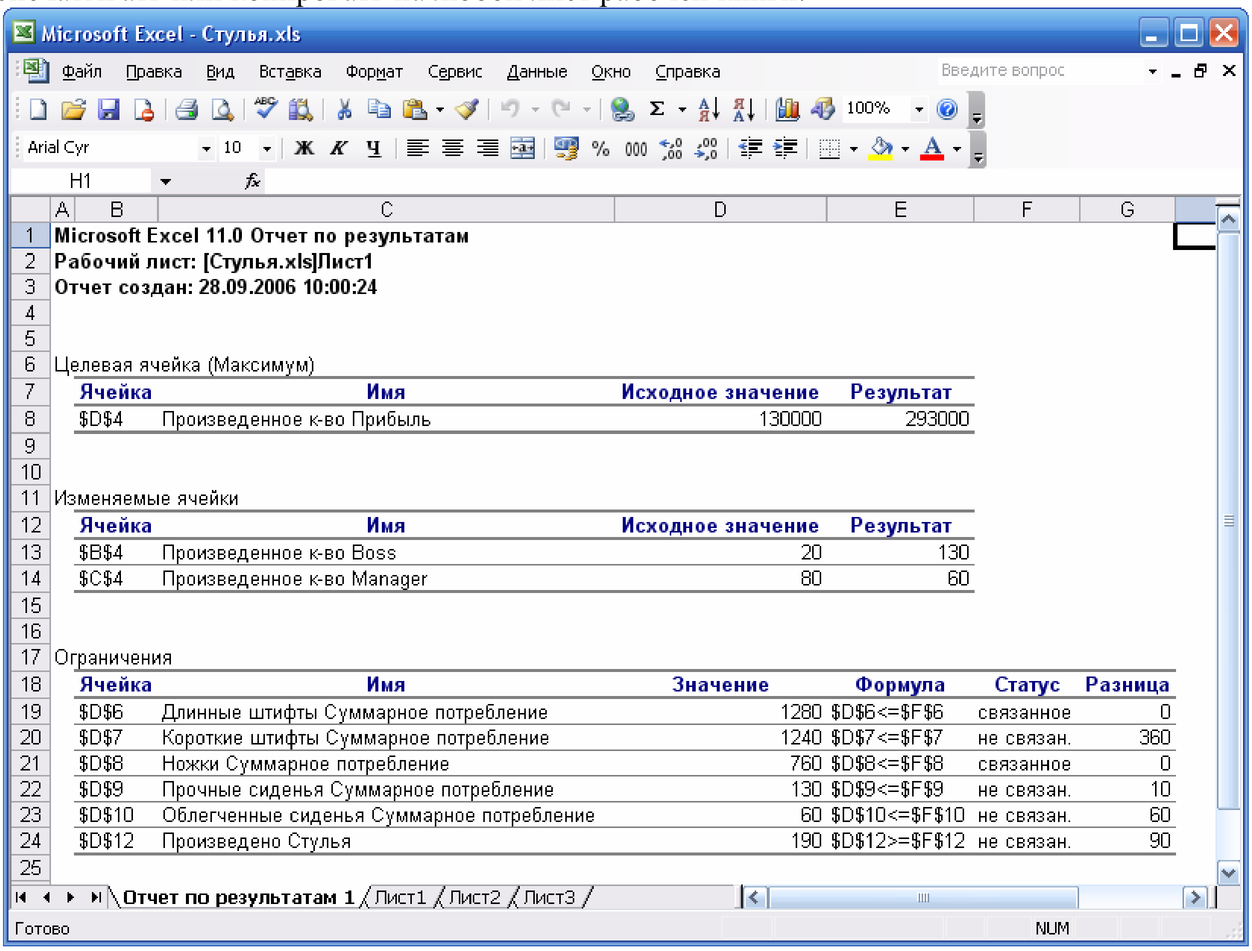


Рис. 13. Диалоговое окно Результаты поиска решений

Если получено сообщение об успешном завершении поиска, как на рис. 13, можно или сохранить найденное решение, выбрав соответствующую опцию, или отбросить его, выбрав опцию ***Восстановить исходные значения***, в результате ячейкам переменных решения будут возвращены значения, которые в них находились до запуска программы ***Поиск решения***. Существует возможность также получить отчеты о решении трех типов. Каждый отчет выводится на новый лист рабочей книги.

Выберем отчет ***Результаты***, что по умолчанию подразумевает сохранение найденного решения, и щелкнем на кнопке ***ОК***. На рис. 14 показан отчет о результатах поиска оптимального решения для модели «Офисный интерьер». Он должен появиться на листе с названием ***Отчет по результатам 1*** (если это имя не было использовано ранее для других листов рабочей книги). Содержимое этого листа можно свободно форматировать, распечатывать или копировать на любой лист рабочей книги.



Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [Стулья.xls]Лист1
Отчет создан: 28.09.2006 10:00:24

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$D$4	Произведенное к-во Прибыль	130000	293000

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$4	Произведенное к-во Boss	20	130
$C$4	Произведенное к-во Manager	80	60

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$D$6	Длинные штифты Суммарное потребление	1280	$D$6<=$F$6	связанное	0
$D$7	Короткие штифты Суммарное потребление	1240	$D$7<=$F$7	не связан.	360
$D$8	Ножки Суммарное потребление	760	$D$8<=$F$8	связанное	0
$D$9	Прочные сиденья Суммарное потребление	130	$D$9<=$F$9	не связан.	10
$D$10	Облегченные сиденья Суммарное потребление	60	$D$10<=$F$10	не связан.	60
$D$12	Произведено Стулья	190	$D$12>=$F$12	не связан.	90

Рис. 14. Отчет о результатах.

После выполнения всех указанных выше действий исходная таблица модели будет выглядеть так как показано на рис. 15. Средство ***Поиск решения*** записало в таблицу оптимальные значения переменных решения, определяющих, сколько стульев «Boss» и «Manager» нужно произвести, — 130 и 60 штук соответственно. После этого таблица пересчитывается в последний раз, чтобы вычислить максимальное значение прибыли — 293000 руб.

Заметим, что значения ячеек в столбце G также были изменены. Они показывают запасы различных деталей после принятия оптимального решения. Если в ячейке резерва для некоторого ограничения стоит 0, такое ограничение называется лимитирующим или связывающим. Лимитирующее ограничение не дает возможности добиться более высокой прибыли. Это значит, что увеличение прибыли путем дополнительного производства стульев «Boss» и/или «Manager» приведет к тому, что значения одной или нескольких ячеек резерва станут отрицательными, т.е. будет нарушено одно или несколько ограничений. Ограничения, имеющие ненулевой резерв (исходя из определения, резерв тогда положительный), не являются лимитирующими. Эти ограничения (по крайней мере на данном этапе) не препятствуют возможности получения более высокой прибыли. Таким образом, именно лимитирующие ограничения представляют интерес в любой модели ЛП. Нулевые значения резерва ограничений для длинных штифтов и ножек означают, что в данном случае существует два лимитирующих ограничения, два "узких места", которые препятствуют компании производить и продавать больше стульев и таким образом получать большую прибыль.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Тип стульев	Boss	Manager				
3	Удельная прибыль	1700	1200	Прибыль			
4	Произведенное к-во	130	60	293000			
5		Потребность в деталях		Суммарное потребление		Начальный запас	Конечный запас
6	Длинные штифты	8	4	1280	≤	1280	0
7	Короткие штифты	4	12	1240	≤	1600	360
8	Ножки	4	4	760	≤	760	0
9	Прочные сиденья	1	0	130	≤	140	10
10	Облегченные сиденья	0	1	60	≤	120	60
11				Стулья		Мин. Производсво	Резерв
12	Произведено	1	1	190	≥	100	90
13							

Рис. 15. Решение, максимизирующее прибыль.

Замечания.

1. *Все настройки диалогового окна* ***Поиск решения*** *для каждой модели сохраняются при сохранении рабочей книги.*
2. *При задании в диалоговом окне* ***Поиск решения*** *правых частей ограничений всегда следует указывать ссылки на ячейки в табличной модели.*
3. *Ячейки правых частей неравенств в табличной модели должны содержать константы, а не формулы (точнее — не формулы, в которые явно или опосредованно входят переменные решения).*

Совет. Чтобы скопировать изображение с экрана монитора в буфер обмена, нужно нажать клавишу <PrintScreen>. Чтобы копировать в буфер обмена изображение, находящееся на переднем плане (например, диалоговое окно), нужно нажать клавиши <Alt+PrintScreen>. Из буфера обмена рисунок можно вставить в рабочий лист Excel или в другой документ в качестве иллюстрации к документации модели.

Задание

Необходимо решить с помощью функции ***Поиск решения*** в Excel две задачи линейного программирования. Результат решения задач оформляется в виде отчета на бумаге формата А4. Содержание отчета приведено ниже. Титульный лист отчета должен содержать следующие данные: №варианта, ФИО студента, Номер группы, Название дисциплины.

Оформленный отчет в электронном виде необходимо сдать на проверку до сессии на следующий электронный адрес: tstu-demirskiy@rambler.ru

Условия для решения задач студент выбирает согласно своему варианту – номеру по списку в группе.

Содержание отчета:

1. Условие задачи №1 согласно варианту.
2. Математическая (символическая) постановка задачи №1.
3. Распечатка табличной модели из Excel для решения задачи №1.
4. Распечатка Отчета о результатах решения задачи №1.
5. Вывод на основе результатов оптимизации для задачи №1.
6. Условие задачи №2 согласно варианту.
7. Математическая (символическая) постановка задачи №2.
8. Распечатка табличной модели из Excel для решения задачи №2.
9. Распечатка Отчета о результатах решения задачи №2.
10. Вывод на основе результатов оптимизации для задачи №2.

Задача №1. Ассортимент продукции

Компания производит две марки телевизоров — Astro и Cosmo. Работают два конвейера, каждый из которых выпускает телевизоры одной марки, и два цеха, занятых производством деталей для телевизоров обеих марок. Производственная мощность конвейера, выпускающего Astro, составляет **A1** телевизоров в день, а конвейера Cosmo — **B1** телевизоров в день. Цех №1 производит телевизионные трубки. На производство трубки для телевизора Astro требуется **C1** час рабочего времени, а на производство трубки для Cosmo — **D1** часа. На данном этапе в цеху №1 производству трубок для телевизоров обеих марок может быть уделено не более **F1** часов рабочего времени в день. В цеху №2 изготавливаются корпуса телевизоров, причем на производство одного корпуса для Astro требуется **G1** час рабочего времени, для Cosmo требуется **H1** час рабочего времени. Цех №2 может посвятить изготовлению корпусов не более **T1** часов рабочего времени в день. Удельная валовая прибыль от реализации Astro и Cosmo составляет **M1** и **K1** руб. соответственно. Эти данные представлены в табл. 5.

Таблица 5. Данные о производстве телевизоров

	Дневная производительность	Удельные трудозатраты, ч		Удельная прибыль, руб.
		Цех №1	Цех №2	
Astro	**A1**	**C1**	**G1**	**M1**
Cosmo	**B1**	**D1**	**H1**	**K1**
Ресурс рабочего времени		**F1**	**T1**	

При условии, что компания может продать все произведенные телевизоры, каким должен быть дневной план производства (т.е. сколько телевизоров каждой марки следует производить ежедневно)? Постройте символическую модель ЛП, разработайте на ее основе табличную модель и оптимизируйте полученную модель с помощью средства ***Поиск решения***.

Все выделенные переменные для условия задачи студент должен заменить числами из табл. 6 согласно своему варианту. Например, для варианта №1 условия задачи будут следующие:

	Дневная производительность	**Удельные трудозатраты, ч**		**Удельная прибыль, руб.**
		Цех №1	**Цех №2**	
Astro	50	1	1	2000
Cosmo	70	2	1	1000
Ресурс рабочего времени		120	90	

Таблица 6. Варианты для условий задачи №1

Вариант	A1	B1	C1	D1	F1	G1	H1	T1	M1	K1
1	28	54	3	2	120	1	1	90	2000	1000
2	50	40	3	2	88	2	1	54	1500	2000
3	48	70	2	1	150	2	1	112	2300	1500
4	35	50	1	2	86	1	1	90	800	1500
5	56	90	3	2	110	1	1	150	1200	1000
6	75	44	3	1	85	2	1	80	2000	800
7	100	50	4	2	85	2	2	78	1800	1200
8	44	80	1	2	150	1	1	90	1100	2000
9	86	42	2	3	80	2	3	96	1400	2200
10	65	110	1	3	150	1	3	120	1300	2500
11	30	65	2	4	76	1	1	124	900	1300
12	75	90	3	2	55	3	1	45	1200	800
13	55	35	2	3	86	2	2	70	1000	1400
14	35	65	2	1	64	2	1	50	1800	1200
15	42	55	1	4	115	1	2	160	700	1500
16	70	65	2	4	86	2	2	120	1000	2000
17	35	20	3	1	50	1	1	122	2000	1500
18	65	38	1	3	100	1	2	144	1500	2300
19	42	28	2	1	90	1	1	110	1500	800
20	86	45	2	3	144	1	1	60	1000	1200
21	65	70	1	4	95	1	3	180	800	2000
22	58	84	1	3	112	2	2	65	1200	1800
23	78	35	4	2	95	2	1	104	2000	1100
24	62	90	3	2	90	1	1	110	2200	1400
25	114	48	4	2	80	2	1	110	2500	1800
26	55	68	2	2	165	2	1	120	1300	900
27	85	64	1	2	85	1	1	105	800	1200
28	42	64	2	1	100	2	1	140	1400	1000
29	68	36	1	3	90	1	2	65	1200	1800
30	42	65	2	1	120	3	1	115	1500	700

Задача №2. Анализ безубыточности при наличии ограничений

Компания производит три типа медицинских приборов — «Радуга», «Витамакс» и «Мега». Соответствующие данные о затратах и доходах на ближайший плановый период представлены в табл. 7.

Таблица 7. Данные о затратах и доходах компании.

Приборы	Цена, руб. за единицу	Переменные затраты, руб. за единицу	Фиксированные затраты, руб.
Радуга	**A2**	**D2**	**G2**
Витамакс	**B2**	**E2**	**H2**
Мега	**C2**	**F2**	**K2**

Фиксированные затраты — это всевозможные расходы, которые существуют независимо от того, какое количество продукта производится. Допустим, что фиксированные издержки производства прибора «Радуга» = 5000000 руб (**G2**). В таком случае, для прибора «Радуга» потребуется затратить те же самые 5000000 руб. независимо от того, будет произведен 1 прибор этого вида, 40 приборов или 0. Высокие фиксированные затраты включают в себя затраты на проектирование прибора, создание опытного образца и его испытания.

На рис. 16 представлено определение точки безубыточности (критического объема производства) для прибора «Радуга». Как следует из графика, если компания будет производить только приборы «Радуга», то для того, чтобы добиться безубыточности, ей потребуется выпустить не менее 1000 штук.

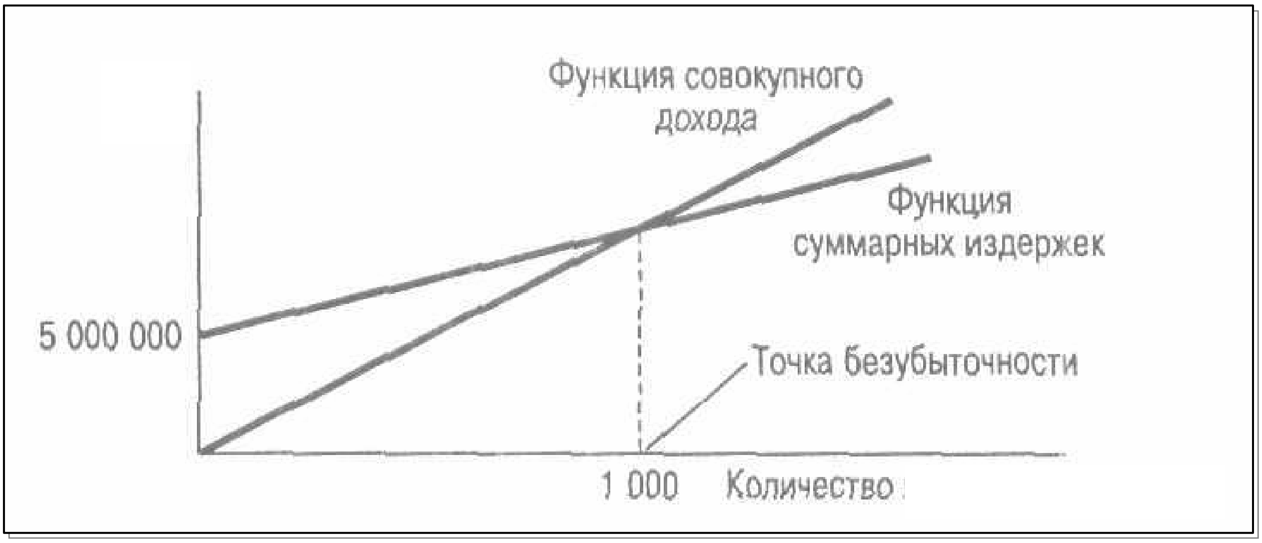


Рис.16. Анализ безубыточности для производства приборов «Радуга»

Однако перед компанией стоит более сложная задача. Во-первых, на следующий плановый период руководство компании уже заключило контракт на производство **N2** приборов «Радуга». Во-вторых, еще один клиент заказал **M2** приборов «Витамакс», и руководство заинтересовано в выполнении данного заказа. Также есть обязательства на производство **Z2** приборов «Мега». В-третьих, анализ рынка, проведенный отделом маркетинга компании, свидетельствует, что следует произвести не более **L2** приборов «Мега».

Руководство компании хочет выяснить, сколько каких приборов необходимо продать, чтобы добиться безубыточности. Таким образом, необходимо учесть наличие трех моделей приборов, а также заключенных соглашений.

Точка безубыточности характеризуется тем, что суммарный доход равняется суммарным затратам. Поскольку компания создана относительно недавно и испытывает определенные сложности с платежами (что связано с быстрым ростом компании), руководство заинтересовано в том, чтобы минимизировать расходы. Поскольку фиксированные затраты придется нести в любом случае, целью можно считать минимизацию суммарных переменных затрат. Таким образом, поставлена задача найти производственный план с наименьшими переменными затратами, соответствующий ограничениям и приносящий доход, равный суммарным затратам. Создайте символическую модель ЛП, на ее основе разработайте табличную версию модели и оптимизируйте ее с помощью средства ***Поиск решения***.

Все выделенные переменные в условии задачи студент должен заменить числами из табл. 8 согласно своему варианту.

Таблица 8. Варианты для условий задачи №2

Вариант	A2	B2	C2	D2	E2	F2	G2	H2	K2	N2	M2	L2	Z2
1	10000	15000	7500	5000	8000	3600	5000000	3000000	10000000	700	400	300	78
2	6500	9750	4875	3900	5850	2925	3250000	1950000	5850000	100	400	800	120
3	12000	18000	9000	7200	10800	5400	6000000	3600000	10800000	200	300	500	64
4	10000	15000	7500	6000	9000	4500	5000000	3000000	9000000	700	100	500	310
5	5500	8250	4125	3300	4950	2475	2750000	1650000	4950000	200	200	400	120
6	7000	10500	5250	4200	6300	3150	3500000	2100000	6300000	300	400	600	230
7	14000	21000	10500	8400	12600	6300	7000000	4200000	12600000	800	300	200	170
8	12500	18750	9375	7500	11250	5625	6250000	3750000	11250000	300	400	500	260
9	5300	7950	3975	3180	4770	2385	2650000	1590000	4770000	400	200	300	190
10	11500	17250	8625	6900	10350	5175	5750000	3450000	10350000	300	400	600	440
11	10000	15000	7500	6000	9000	4500	5000000	3000000	9000000	300	200	700	480
12	14300	21450	10725	8580	12870	6435	7150000	4290000	12870000	200	500	600	344
13	7100	10650	5325	4260	6390	3195	3550000	2130000	6390000	500	700	200	180
14	11600	17400	8700	6960	10440	5220	5800000	3480000	10440000	200	100	400	220
15	4600	6900	3450	2760	4140	2070	2300000	1380000	4140000	500	600	100	42
16	14200	21300	10650	8520	12780	6390	7100000	4260000	12780000	250	300	650	340
17	18100	27150	13575	10860	16290	8145	9050000	5430000	16290000	410	600	250	124
18	17500	26250	13125	10500	15750	7875	8750000	5250000	15750000	680	400	180	68
19	5400	8100	4050	3240	4860	2430	2700000	1620000	4860000	500	300	260	55
20	6800	10200	5100	4080	6120	3060	3400000	2040000	6120000	540	400	330	110
21	13200	19800	9900	7920	11880	5940	6600000	3960000	11880000	620	350	200	80
22	19800	29700	14850	11880	17820	8910	9900000	5940000	17820000	440	200	350	122
23	12000	18000	9000	7200	10800	5400	6000000	3600000	10800000	360	400	540	250
24	15000	22500	11250	9000	13500	6750	7500000	4500000	13500000	270	300	650	300
25	6800	10200	5100	4080	6120	3060	3400000	2040000	6120000	500	350	150	144
26	7400	11100	5550	4440	6660	3330	3700000	2220000	6660000	380	400	420	150
27	16100	24150	12075	9660	14490	7245	8050000	4830000	14490000	410	500	200	100
28	11800	17700	8850	7080	10620	5310	5900000	3540000	10620000	550	300	320	86
29	10200	15300	7650	6120	9180	4590	5100000	3060000	9180000	250	200	440	140
30	5300	7950	3975	3180	4770	2385	2650000	1590000	4770000	400	100	380	50

Вопросы для зачета

1. Содержание задачи линейного программирования.
2. Что такое целевая функция?
3. Для чего нужны ограничения в задаче линейного программирования?
4. Что такое условие неотрицательности?
5. Какие функции являются линейными?
6. В чем особенность учета постоянных и переменных издержек в задаче линейного программирования?
7. Этапы создания табличной модели в Excel.
8. Этапы работы с надстройкой «Поиск решения».
9. Какие данные необходимо ввести в диалоговое окно «Поиск решения»?
10. Какие настройки содержит инструмент «Поиск решения»?
11. Вопросы по задаче 1 и 2.