Лабораторная работа № 2.

Решение хорошо структурированных задач. Методы оптимизации. Алгоритм Свенна. Метод золотого сечения.

Цель: изучение метода «золотого сечения»

1 Теоретические положения

Постановка задачи: требуется найти безусловный минимум функции *f(x)* одной переменной, т. е. такую точку $x^* \in R$, что $f\left(x^*\right) = \min_{x \in R} f(x)$.

Большинство известных методов одномерной минимизации применяется для класса унимодальных функций.

Для эвристического выбора начального интервала неопределенности $[a_0, b_0]$ можно применить **алгоритм Свенна** [1]:

– задать произвольно следующие параметры: x^0 – некоторую точку, $t > 0$ – величину шага. Принять $k = 0$;

– вычислить значение функции в трех точках: $x^0 - t$; x^0; $x^0 + t$;

– проверить условие окончания:

а) если $f(x^0 - t) \geq f(x^0) \leq f(x^0 + t)$, то начальный интервал неопределенности найден: $[a_0, b_0] = [x^0 - t,\ x^0 + t]$;

б) если $f(x^0 - t) \leq f(x^0) \geq f(x^0 + t)$, то функция не является унимодальной, а требуемый интервал неопределенности не может быть найден. Вычисления при этом прекращаются (задается другая начальная точка x^0);

в) если условие окончания не выполняется, то перейти к шагу 4;

– определить величину Δ:

а) если $f(x^0 - t) \geq f(x^0) \geq f(x^0 + t)$, то $\Delta = t$; $a_0 = x^0$; $x^1 = x^0 + t$; $k = 1$;

б) если $f(x^0 - t) \leq f(x^0) \leq f(x^0 + t)$, то $\Delta = -t$; $b_0 = x^0$; $x^1 = x^0 - t$; $k = 1$;

– найти следующую точку $x^{k+1} = x^k + 2^k \Delta$;

– проверить условие убывания функции:

а) если $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ и $\Delta = t$, то $a_0 = x^k$;

если $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ и $\Delta = -t$, то $b_0 = x^k$;

в обоих случаях принять $k = k + 1$ и перейти к шагу 5;

б) если $f(x^{k+1}) \geq f(x^k)$, процедура завершается. При $\Delta = t$ принять $b_0 = x^{k+1}$, а при $\Delta = -t$ принять $a_0 = x^{k+1}$. В результате будет получен искомый начальный интервал неопределенности $[a_0, b_0]$.

Алгоритм метода «золотого сечения».

Шаг 1. Задать $L_0 = [a_0, b_0]$, точность $l > 0$.

Шаг 2. Принять $k = 0$.

Шаг 3. Вычислить точки $y_0 = a_0 + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0)$; $z_0 = a_0 + b_0 - y_0$.

Шаг 4. Вычислить $f(y_k)$, $f(z_k)$.

Шаг 5. Сравнить значения функции в точках «золотого сечения» $f(y_k)$ и $f(z_k)$:

а) если $f(y_k) \le f(z_k)$, то принять $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = z_k$ и $y_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - y_k$, $z_{k+1} = y_k$. Перейти к шагу 6;

б) если $f(y_k) > f(z_k)$, то принять $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = b_k$ и $y_{k+1} = z_k$, $z_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - z_k$.

Шаг 6. Вычислить $\Delta = |a_{k+1} - b_{k+1}|$ и проверить условие окончания:

а) если длина Δ текущего интервала неопределенности оказывается меньше установленной величины ($\Delta \le l$), процесс поиска завершается и $x^* \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$. В качестве приближенного решения можно взять середину последнего интервала: $x^* = (a_{k+1} + b_{k+1})/2$;

б) если $\Delta > l$, принять $k = k + 1$ и перейти к шагу 4.

2 Задание

Для заданного варианта функции необходимо найти ее экстремум с использованием метода «золотого сечения» и алгоритма Свенна.

Содержание отчета: тема и цель работы; результаты нахождения экстремума функции; сравнение результатов решения задачи с полученными в *MS Office Excel*.

1 $f(x) = x^2 - 2x + \sin x$;

2 $f(x) = x^2 - \sqrt{x} - \cos x$;

5 $f(x) = x^2 + 2x - 0{,}4\sin x$;

6 $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 0{,}1\sin x$;

7 $f(x) = 0{,}05x^3 + 5x^2 + \sin x$;

8 $f(x) = 0{,}05x^3 + x^2 - 10$;

9 $f(x) = 0{,}3x^2 + 3x - 0{,}3\cos x$;

10 $f(x) = x^2 + \sqrt[3]{x} - 15$.

3 $f(x) = x^2 - \cos x - 5$;

4 $f(x) = 2x^2 + 3x + \cos x$;

11 $f(x) = 10x^2 - 20x + 10$;

12 $f(x) = 0{,}7x^2 + 5x + \sin x$;

13 $f(x) = x^2 - \sqrt{x} - 10$;

14 $f(x) = 3x^2 + 0{,}03\sqrt{x} + 5$;

15 $f(x) = 3x^2 + \sqrt{x} + 10$;

Контрольные вопросы

1 Как относятся длины последовательных интервалов в методе «золотого сечения»?

2 Каким образом определяется отрезок, на котором находится экстремум? Каким образом можно повысить точность нахождения решения?