Лабораторная работа № 3.

Методы нулевого порядка многомерной минимизации.
Метод сопряженных направлений (метод Пауэлла).

Цель: изучение метода сопряженных направлений (метода Пауэлла).

1 Теоретические положения

Постановка задачи поиска экстремума: требуется найти безусловный минимум функции $f(x)$ многих переменных, т. е. найти такую точку $x^* \in R^n$, что $f(x^*) = \min\limits_{x \in R^n} f(x)$.

Алгоритм метода сопряженных направлений (метода Пауэлла).

Шаг 1. Задать начальную основную точку x^0, число ε > 0, начальные направления поиска $d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, …, $d_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Принять $d_0 = d_n$, номер направления поиска $i = 0$, $y^0 = x^0$, задать счетчик итераций $k = 0$.

В случае двумерной задачи (n = 2) будет получена система двух линейно независимых направлений, т. е. два начальных направления поиска: $d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. При первом поиске используется последнее направление $d_0 = d_2$. Принимается номер направления поиска $i = 0$ (всего таких номеров для двумерной задачи три – 0 и 1 и 2 (т. е. конечное i равно n-му направлению ($i = \overline{0, n}$). Первые два номера соответствуют номерам осей координат, последний номер – это число, обозначающее сопряженное направление). Задается промежуточная точка при поиске по новому направлению $y^0 = x^0$ и $k = 0$.

Шаг 2. Найти путем одномерного поиска новую промежуточную точку $y^{i+1} = y^i + t_i\, d_i$, где шаг (просто число) t_i находится в результате поиска минимума функции $f\left(y^i + t_i\, d_i\right)$ по t_i одним из методов одномерной минимизации в выбранном направлении поиска.

Функция $f\left(y^i + t_i\, d_i\right)$ на данном шаге формируется следующим образом: $y^1 = y^0 + t_i\, d_0 = \begin{pmatrix} x_0^0 \\ x_1^0 \end{pmatrix} + t_i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Шаг 3. Проверить выполнение условий для текущего номера направления поиска i :

а) если $i < n - 1$, то все номера координат еще не обследованы, нужно проверить следующее направление поиска, поэтому необходимо принять $i = i + 1$ и перейти к шагу 2;

б) если $i = n - 1$, тут проверяется успешность поиска по n первым направлениям. Если текущая промежуточная точка $y^n = y^0$, то поиск завершить: $x^* = y^n$, иначе принять $i = i + 1$ и перейти к шагу 2;

в) если $i = n$, нужно проверить успешность поиска по n последним направлениям. Если текущая промежуточная точка совпадает с первоначальной $y^{n+1} = y^1$, поиск завершить: $x^* = y^{n+1}$, иначе перейти к шагу 4 для построения сопряженного направления.

Шаг 4. Принять следующую основную точку $x^{k+1} = y^{n+1}$ и проверить условие окончания:

а) если евклидова норма отрезка, соответствующего сопряженному направлению $\left\| x^{k+1} - x^k \right\| < \varepsilon$, то поиск завершить: $x^* = x^{k+1}$;

б) иначе принять новое направление: $\overline{d_0} = \overline{d_n} = y^{n+1} - y^1$ и исключить старое направление $\overline{d_i} = d_{i+1}, i = 1, ..., n - 1$.

Если при этом $\operatorname{rang}\left(\overline{d_1}, ..., \overline{d_n}\right) = n$, то новая система направлений линейно независима. В этом случае следует принять новое направление равным текущему: $\overline{d_i} = d_i, i = 0, 1, ..., n; k = k + 1, i = 0, y^0 = x^{k+1}$ и перейти к шагу 2.

Если $\operatorname{rang}\left(\overline{d_1}, ..., \overline{d_n}\right) < n$, то новая система направлений линейно зависима. Тогда следует продолжать поиск в старых направлениях. Для этого сохранить старые направления $d_i = d_i, i = 0, 1, ..., n; y^0 = x^{k+1}; \ k = k + 1, \ i = 0$ и перейти к шагу 2.

2 Задание

В соответствии с вариантом задания по таблице 5.1 необходимо найти экстремум целевой функции

Нечетные варианты выполняются с использованием метода сопряженных направлений (метода Пауэлла), четные – с использованием метода деформируемого многогранника (метода Нелдера-Мида).

Содержание отчета: тема и цель работы; результаты нахождения экстремума функции; сравнение результатов решения задачи с полученными в *MathCAD* или *MS Office Excel*; диаграмма классов.

Таблица 1 – Варианты функций

Номер варианта	Функция	Номер варианта	Функция
1	$f(x,y)=x^2+y^2-2xy^2+x+10$	2	$f(x,y)=x^2+y^2+4x^2y-5x-1$
3	$f(x,y)=x^2+y^2-4x^2y^2-y-5$	4	$f(x,y)=x^2-4xy+4y^2-5y-1$
5	$f(x,y)=x^2+xy^2+2xy+y^2+5$	6	$f(x,y)=x^2-y^2+10x^2y+6$
7	$f(x,y)=x^2+2xy^2-2xy-5x$	8	$f(x,y)=2x^2+y^4-xy-5x-4$
9	$f(x,y)=x^2+y^2-2xy^2-3y-1$	10	$f(x,y)=x^2-2y^2-6xy-5x+4$
11	$f(x,y)=x^2+y^2-2xy^2+10x+5$	12	$f(x,y)=x^4+2y^2+10xy^2+8x$
13	$f(x,y)=7x^2+10y^4-5x^2y^2+9$	14	$f(x,y)=x^4+y^2-20x^2y+7$
15	$f(x,y)=x^2-y^2-2x^2y^2+10$		

Контрольные вопросы

1 За какое количество шагов обеспечивается сходимость метода Пауэлла для квадратичных функций?