

Лабораторная работа № 5.
Решение неструктурированных задач.
Метод экспертного ранжирования.
Методы парных и последовательных сравнений

Цель работы:

- 1) Изучить метод экспертного ранжирования, методы парных сравнений, последовательных сравнений;
- 2) изучить способы оценки согласованности между ранжировками экспертов.

Метод экспертного ранжирования

Пусть имеется m экспертов $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_m$ и n целей Z_1, Z_2, \dots, Z_n .

Каждый эксперт проводит оценку целей, пользуясь 10-бальной шкалой, причем оценки могут быть как целыми, так и дробными. В этих условиях веса целей определяются следующим образом:

1. Составляется матрица оценок экспертов:

| \mathcal{E}_j/Z_i | Z_1 | Z_2 | ... | Z_n |
|---------------------|----------|----------|-----|----------|
| \mathcal{E}_1 | S_{11} | S_{12} | ... | S_{1n} |
| \mathcal{E}_2 | S_{21} | S_{22} | ... | S_{2n} |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| \mathcal{E}_m | S_{m1} | S_{m2} | ... | S_{mn} |

2. $0 \leq p_{ji} \leq 10$ ($j = 1, m, i = 1, n$)
3. Составляется матрица нормированных оценок:

$$\omega = p_{ji} / \sum p_{ji} \quad (j = 1, m, i = 1, n)$$

4. Вычисляются искомые веса целей:

$$\omega_i = \sum \omega_{ij} / \sum \sum \omega_{ij} \quad (i = 1, n) \quad \sum \omega_i = 1.$$

Пример:

Найдем веса целей для случая $m = 2$ и $n = 6$

1. Матрица оценок экспертов:

| \mathcal{E}_j/Z_i | Z_1 | Z_2 | Z_3 | Z_4 | Z_5 | Z_6 |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| \mathcal{E}_1 | 10 | 7 | 9 | 3 | 4 | 5 |
| \mathcal{E}_2 | 8 | 6 | 10 | 4 | 2 | 7 |

2. Матрица нормированных оценок:

| \mathcal{E}_j/Z_i | Z_1 | Z_2 | Z_3 | Z_4 | Z_5 | Z_6 |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| \mathcal{E}_1 | 10/38 | 7/38 | 9/38 | 3/38 | 4/38 | 5/38 |
| \mathcal{E}_2 | 8/38 | 6/38 | 10/38 | 4/38 | 2/38 | 7/38 |

3. Искомые веса целей:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= (10/38 + 8/37)/2 = 0,239; \\ \omega_2 &= \dots = 0,173; \\ \omega_3 &= \dots = 0,254; \\ \omega_4 &= \dots = 0,093; \\ \omega_5 &= \dots = 0,079; \\ \omega_6 &= \dots = 0,16.\end{aligned}$$

Метод парных сравнений

Парное сравнение - это установление предпочтения объектов при сравнении всех возможных пар. Здесь не нужно, как при ранжировании, упорядочивать все объекты, необходимо в каждой из пар выявить более значимый объект или установить их равенство.

Парное сравнение можно проводить при большом числе объектов, а также в тех случаях, когда различие между объектами столь незначительно, что практически невыполнимо их ранжирование.

Одна из возможных модификаций метода состоит в следующем:

Эксперт проводит оценку целей Z_1, Z_2, Z_n .

1 составляется матрица парных (бинарных) сравнений целей во всех возможных сочетаниях. В каждой паре выделяется наиболее предпочтительная цель. И это предпочтение выражается с помощью оценки по какой-либо шкале – трехуровневой либо двухуровневой.

Составляется матрица размером $n \times n$, где n – количество сравниваемых объектов. Общий вид матрицы парных сравнений представлен на рисунке.

| Объекты | 1 | 2 | ... | n | Σ |
|---------|---|---|-----|---|----------|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| ... | | | | | |
| n | | | | | |

Рисунок - Общий вид матрицы парных сравнений

При сравнении объектов с использованием **трехуровневой шкалы** матрица заполняется элементами a_{ij} следующим образом :

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{если объект } i \text{ предпочтительнее объекта } j \ (i > j); \\ 1, & \text{если установлено равенство объектов } i \text{ и } j \ (i = j); \\ 0, & \text{если объект } j \text{ предпочтительнее объекта } i \ (i < j) \end{cases}$$

При использовании **двухуровневой** шкалы:

$a_{ij} = 1$, если объект i важнее, чем объект j ($i > j$);

$a_{ij} = 0$ – в противоположном случае ($i < j$).

Для этой шкалы обычно принимают, что $a_{ij} = 0$ – при равенстве показателей по важности и, следовательно, $a_{ij} = 0$.

2 Определяется цена каждой цели путем суммирования элементов a_{ij} по соответствующей строке матрицы.

3 Обработка матрицы оценок позволяет найти веса целей, характеризующие их относительную важность.

Сумма a_{ij} (по строке) в данном случае позволяет оценить относительную значимость объектов. Тот объект, для которого сумма окажется наибольшей, может быть признан наиболее важным (значимым).

Суммирование можно производить и по столбцам (a_{ij}), тогда самым существенным будет фактор, набравший наименьшее количество баллов.

Пример: Эксперт проводит оценку 3-х целей

Составим матрицу бинарных сравнений с использованием двухуровневой шкалы:

$a_{ij} = 1$, если объект i важнее, чем объект j ($i > j$);

$a_{ij} = 0$ – в противоположном случае ($i < j$).

| Z_i/Z_j | Z_1 | Z_2 | Z_3 | Цена каждой цели C_i (складываем по строкам) | Нормированные веса целей v_i | Порядок предпочтения целей |
|-----------|-------|-------|-------|--|--------------------------------------|----------------------------------|
| Z_1 | | 1 | 1 | 2 | $2/3 = 0,67$ | 1 |
| Z_2 | 0 | | 0 | 0 | 0 | 3 |
| Z_3 | 0 | 1 | | 1 | $1/3 = 0,33$ | 2 |
| | | | | $\sum C_i$ (по столбцу) = 3 | $\sum v_i$ (по столбцу) = 1 | |

Определим цену каждой цели (складываем по строкам)

$C_1 = 2$; $C_2 = 0$; $C_3 = 1$;

Эти числа уже характеризуют важность объектов. Нормируем, т.к. этими числами неудобно пользоваться. Сумма цен всех целей $\sum C_i$ (по столбцу) = 3.

Нормированные веса целей:

$v_1 = 2/3 = 0,67$; $v_2 = 0$; $v_3 = 0,33$;

Проверка: сумма v_i должна равняться 1.

Получаем порядок предпочтения целей: Z_1, Z_3, Z_2

Метод последовательных сравнений

Одна из возможных модификаций метода состоит в следующем:

1. Все цели располагаются в виде массива в порядке убывания их важности и назначаются предварительные оценки целей. При этом первая цель массива получает оценку 100, а остальным целям ставятся в соответствие оценки, отражающие их важность.

2. Первая цель массива сравнивается со всеми возможными комбинациями ниже стоящих целей по 2. В случае необходимости оценка первой цели корректируется. Вторая цель массива сравнивается со всеми возможными комбинациями ниже стоящих целей по 2. В случае необходимости оценка 2-ой цели корректируется и т. д.

3. Производится запись скорректированных оценок и расчет на их основе весов целей.

Пример:

Эксперт проводит оценку 4-х целей, которые связаны с решением транспортной проблемы (см. пример выше).

Расположим цели в виде массива и назначим предварительные оценки Z_1, Z_3, Z_4, Z_2 . Выставляем баллы: $p_1 = 100, p_3 = 60, p_4 = 40, p_2 = 10$

Выполним сравнение целей и корректировку их оценок

$Z_1(Z_3 \& Z_4)$

$Z_1(Z_3 \& Z_2)$

$Z_1(Z_4 \& Z_2)$

$Z_3(Z_4 \& Z_2)$

(т.е. цель Z_1 сравниваем с комбинацией Z_3 и Z_4)...

Возможно, что построить метрополитен лучше, чем 3 и 4, но 3+4 дают 100, поэтому корректируем оценки: $p_1 = 125$; $p_3 = 60$;

Запишем скорректированные оценки и вычислим веса целей:

$$p_1 = 125; p_3 = 60; p_4 = 40; p_2 = 10;$$

$$v_1 = 125/\text{сумма всех оценок} = 0,54; v_3 = 0,25; v_4 = 0,17; v_2 = 0,04$$

Проверка: сумма v_i должна равняться 1.

Получаем порядок предпочтения целей: Z_1, Z_3, Z_4, Z_2

Согласованность между ранжировками двух экспертов можно определить с помощью **коэффициента ранговой корреляции Спирмэна**:

$$\rho = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - x_{ik})^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)},$$

где x_{ij} – ранг, присвоенный i -му объекту j -м экспертом;

x_{ik} – ранг, присвоенный i -му объекту k -м экспертом;

d_i – разница между рангами, присвоенными i -му объекту;

n – количество факторов.

Величина коэффициента ранговой корреляции ρ может изменяться в диапазоне от -1 при наибольшем расхождении в мнениях экспертов до $+1$ при полном совпадении оценок.

Когда необходимо определить согласованность в ранжировках большого (более двух) числа экспертов, рассчитывается так называемый **коэффициент конкордации (коэффициент Кендалла)** – общий коэффициент ранговой корреляции для группы, состоящей из m экспертов:

$$W = \frac{12 S}{m^2(n^3 - n)}$$

где n – количество объектов

m – количество экспертов

S – квадрат отклонения, вычисляется по формуле

$$S = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x_{ij} - \frac{1}{2} m(n+1) \right)^2$$

x_{ij} – ранг, присвоенный i -му объекту j -м экспертом.

Заметим, что вычитаемое в скобках представляет собой не что иное, как среднюю сумму рангов (при суммировании для каждого объекта), полученных i объектами от экспертов.

Коэффициент W изменяется в диапазоне от 0 при полной рассогласованности оценок экспертов до единицы 1 в случае, если все эксперты присвоили объектам одинаковые ранги. Согласованность считается достаточной, если коэффициент конкордации больше 0,5.

Далее приведем примеры расчета коэффициентов ρ и W .

Пример. Пусть два эксперта приписали четырем факторам, влияющим на успешность реализации проекта, ранги, показанные в таблице 1. На основе приведенных данных рассчитать коэффициент ранговой корреляции Спирмэна.

Решение. Промежуточные результаты расчетов (d_i и d_i^2) приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Исходные данные и промежуточные результаты расчетов примера 1

| Фактор | Ранги | | d_i | d_i^2 |
|----------|--------------------------------|--------------------------------|-------|---------|
| | первый эксперт (x_{i1}) | второй эксперт (x_{i2}) | | |
| Z_1 | 4 | 4 | 0 | 0 |
| Z_2 | 3 | 1 | 2 | 4 |
| Z_3 | 1 | 2 | -1 | 1 |
| Z_4 | 2 | 3 | -1 | 1 |
| Σ | | | | 6 |

Подставляя вычисленное значение в формулу для вычисления коэффициента Спирмэна, получим:

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 6}{4(4^2 - 1)} = 0,4$$

Такое значение коэффициента Спирмэна свидетельствует о некоторой согласованности оценок экспертов.

Пример. Три эксперта проранжировали четыре варианта капиталовложений (соответствующие оценки приведены в таблице 2). Проверить согласованность ранжировок, используя **коэффициент конкордации (Кендалла)**.

Решение. Количество экспертов $m = 3$, количество объектов $n = 4$
В таблице 2 приведены промежуточные результаты расчетов.

Таблица 2 - Исходные данные и промежуточные результаты расчетов примера 2

| Варианты | Эксперты | | | Сумма рангов (по строкам) | Квадрат отклонения S | $\left(\sum_{j=1}^m x_{ij} - \frac{1}{2} m(n+1) \right)^2$ |
|----------|----------|---|---|------------------------------|----------------------|--|
| | 1 | 2 | 3 | | | |
| Z_1 | 1 | 2 | 3 | 6 | 2,25 | |
| Z_2 | 2 | 3 | 1 | 6 | 2,25 | |
| Z_3 | 4 | 4 | 4 | 12 | 20,25 | |
| Z_4 | 3 | 1 | 2 | 6 | 2,25 | |
| Σ | | | | | $\Sigma S = 27$ | $S = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x_{ij} - \frac{1}{2} m(n+1) \right)^2$ |

Подставляя вычисленное значение в формулу коэффициента конкордации, получим:

$$W = \frac{12 S}{m^2(n^3 - n)} = \frac{12 \cdot 27}{3^2(4^3 - 4)} = 0,6$$

Такая величина коэффициента конкордации W позволяет сделать вывод о том, что существует неслучайная согласованность в мнениях экспертов.

Задание

Примечание: К задаче по варианту необходимо составить матрицу попарного сравнения альтернатив.

Задачи, имеющие четные номера, решаются с применением метода экспертного ранжирования.

Задачи, имеющие нечетные номера, решаются с применением метода парных и последовательных сравнений.

Необходимо оценить согласованность между ранжировками экспертов с помощью *коэффициента ранговой корреляции Спирмэна* либо с помощью *коэффициента конкордации (коэффициента Кендалла)*.

Варианты заданий

Вариант 1. Эксперт проводит оценку четырех вариантов по строительству торгового центра:

- 1 достроить одноэтажное неиспользуемое помещение в центральном районе города;
- 2 построить новый супермаркет, требующий крупных капиталовложений, с выгодным расположением;
- 3 построить супермаркет за чертой города, с небольшими затратами;
- 4 построить торговый центр на окраине города, район оснащен развитой транспортной сетью и паркингом.

Найти оптимальный вариант проекта.

Вариант 2. Компания устраивает рекламную акцию по поводу открытия нового магазина. Группа экспертов из двух человек собрана для выбора наилучшей программы для привлечения потенциальных покупателей:

- 1 пригласить популярную поп-группу;
- 2 предложить скидку каждому покупателю;
- 3 раздавать призы;
- 4 устроить лотерею.

Вариант 3. Анализ результатов экономической деятельности предприятия показал его неспособность функционировать на рынке. Пригласили эксперта для помощи руководству принять решение о выходе из сложившейся ситуации. Рассматриваются следующие варианты:

- 1 Ликвидировать предприятие
- 2 Выставить на продажу
- 3 Объявить банкротом
- 4 Провести санацию

Выяснить оптимальный путь дальнейшего развития предприятия.

Вариант 4. Для решения проблемы, связанной с невозможностью предоставления жилья иногородним студентам была созвана группа экспертов из 4-х человек. Предложено несколько альтернатив:

- 1 Построить новое общежитие
 - 2 Снять многоквартирный дом и частично оплачивать жилье
 - 3 Назначить доплату незаселенным студентам.
- Определить наилучшую альтернативу.

Вариант 5. Правительство приняло решение выделить денежные средства из бюджета наиболее важному социальному объекту. Для выделения самого приоритетного была приглашен эксперт и рассмотрены предложенные варианты:

- 1 Разбить парк отдыха
- 2 Построить теннисные корты
- 3 Построить телебашню
- 4 Реконструировать центральную площадь
- 5 Построить библиотеку

Определить наилучшую альтернативу.

Вариант 6. Для распространения информации об услугах и продукции лаборатории и дополнительной рекламы группа из 3-х экспертов группа экспертов из отдела маркетинга должны оценить наиболее эффективный вариант мероприятия:

- 1 заказ мультимедиа презентации;
- 2 выпуск периодического печатного издания;
- 3 выпуск ежегодных каталогов услуг;
- 4 создание корпоративного сайта.

Найти наиболее эффективный и выгодный вариант рекламной акции.

Вариант 7. Для продвижения товаров и услуг на рынке холдингу необходимо провести дополнительные рекламные мероприятия. Эксперт из отдела сбыта проводит анализ четырех вариантов решения этого вопроса :

- 1 Создание интернет-магазина;
- 2 Введение круглосуточного режима работы, увеличение кадров;
- 3 Открытие еще одного филиала;
- 4 Усилить рекламу в СМИ;

Определить наиболее информативный способ расширения и рекламы.

Вариант 8. В результате эффективного использования иностранных инвестиций и грамотной политики предприятие получило значительную прибыль. Руководитель и инвесторы утвердили эксперта для решения проблемы выбора объекта, которому будут выделены средства на развитие. Четырем экспертам предложены следующие цели:

- 1 Строительство физкультурного клуба для сотрудников на территории предприятия;
- 2 Заказ проекта корпоративного сайта;
- 3 Инвестирование крупного строительного проекта.

Определить наилучшую альтернативу

Вариант 9. В результате успешной деятельности банка и востребования его услуг руководство стоит перед проблемой организации дальнейшего бесперебойного предоставления услуг населению, расширения, привлечения новых клиентов. Для этого эксперту поручено определить наиболее удачный вариант решения вопроса:

- 1 Открытие дополнительного филиала в городе;
- 2 Приобретение здания необходимого размера для перемещения банка и его расширения;

- 3 Введение круглосуточного режима работы, увеличение кадров.
 Определить наилучшую альтернативу

Вариант 10. Из республиканского и местных бюджетов выделены средства в сферу здравоохранения три эксперта проводят оценку наиболее нуждающейся и важной сферы медицины для получения субсидий.

- 1 Замена всего оборудования, отработавшего нормативный срок, на новое;
 - 2 Установка дорогостоящего современного оборудования в специализированных центрах и диспансерах;
 - 3 Открытие поликлиник в густонаселенных микрорайонах;
 - 4 Строительство наркологического центра.
- Определить наиболее важную цель

Вариант 11. Компания «Перспектив» хочет получить максимальную прибыль. Для этого руководство пригласило эксперта, для выбора наилучшей альтернативы из предложенных:

- 1 открытие собственного производства;
 - 2 увеличение затрат на рекламу;
 - 3 расширение рынка сбыта;
 - 4 снижение цен с целью увеличения оборота.
- Определить наилучшую альтернативу

Вариант 12. За перевыполнение плана руководство компании хочет наградить работников. Для этого трем экспертам поручено определить наиболее удачный вариант решения вопроса:

- 1 выдать разовую прибыль;
 - 2 устроить корпоративную вечеринку;
 - 3 дать оплачиваемый отпуск;
 - 4 увеличить зарплату.
- Определить наилучшую альтернативу.

Вариант 13. За отличную учебу родители решили поощрить своих детей. Для этого они пригласили эксперта для выбора наилучшего варианта:

- 1 увеличение карманных денег;
 - 2 путевку в санаторий;
 - 3 разрешить гулять до 23:00
- Определить наилучшую альтернативу.

Вариант 14. Руководство университета решило поспособствовать культурному обогащению учащихся.

Для этого руководство пригласило 3 экспертов, для выбора наилучшей альтернативы из предложенных:

- 1 бесплатные билеты в театр;
 - 2 бесплатные билеты на выставку;
 - 3 бесплатные билеты в кино;
- Определить наилучшую альтернативу.

Вариант 15. На основе отчетных данных деятельности предприятия руководство признало необходимость дополнительной рекламы товаров. Рекламный отдел предло-

жил несколько вариантов рекламных мероприятий, различающихся как по стоимости так и по эффективности. Эксперт отдела проводит оценку предложенных целей:

- 1 Реклама в ведущих печатных изданиях республики и в радиоэфире;
 - 2 Рекламный ролик выпускаемой продукции на ведущем телеканале страны в дорогое эфирное время;
 - 3 Реклама в интернете (почтовые рассылки, баннерная реклама, электронные публикации);
 - 4 Установка выставочных стендов в главных торговых центрах крупных городов на длительный срок;
 - 5 Спонсировать какое-либо значимое общественное мероприятие (например, выступления известной команды КВН, выставку «Моторшоу», парк детских аттракционов).
- Определить наилучшую альтернативу.

Содержание отчета

- 1 Тема и цель работы.
- 2 Текст программы с комментариями.
- 3 Результаты выполнения программы.

Контрольные вопросы

- 1 Классификация и общая характеристика методов экспертных оценок.
- 2 Сущность метода экспертного ранжирования.
- 3 Сущность метода парных сравнений.
- 4 Когда применяется коэффициент ранговой корреляции Спирмэна? А коэффициент конкордации?
- 5 Для чего нужно оценивать согласованность между ранжировками экспертов?