Лабораторная работа № 9.

Принятие решений при многих критериях.
Векторная оптимизация.

Цель: изучение различных методов решения задач векторной оптимизации.

9.1 Теоретические положения

Векторная оптимизация (многокритериальная оптимизация) – это нахождение оптимальных значений по нескольким критериям оптимальности (показателям эффективности или целевым функциям).

Особенностью задач векторной оптимизации является наличие в области допустимых значений области компромиссов, в которой невозможно одновременное улучшение всех критериев. Принадлежащие области компромиссов планы называются эффективными или оптимальными по Парето. План – это решение экономико-математической модели (т. е. набор значений неизвестных, удовлетворяющих системе ограничений модели).

Число возможных схем компромиссов практически не ограничено.

Далее рассмотрены некоторые из методов решения задач векторной оптимизации, относящиеся к группе методов последовательного применения критериев (метод последовательных уступок, метод ограничений).

Метод последовательных уступок.

В этом методе вместо многокритериальной задачи последовательно решается несколько однокритериальных задач (по числу критериев), причем для каждого последующего критерия вводится дополнительное ограничение на величину предыдущего критерия.

1 Устанавливается предпочтительность всех критериев, т. е. на первое место ставится самый важный критерий.

2 Находится оптимальное решение f_1^* по самому важному критерию $f_1(X)$ с учетом системы ограничений (при этом остальные критерии будут рассматриваться на последующих этапах решения задачи). Это решение f_1^* обращает в экстремум самый важный критерий $f_1(X)$.

3 Лицом, принимающим решение (ЛПР), устанавливается величина уступки Δ_1. Уступка назначается исходя из практических соображений с учетом малой точности, с которой нам известны входные данные, т. е ЛПР согласно сделать эту уступку, чтобы максимизировать второй критерий.

4 Решается задача по следующему критерию $f_2(X)$ с дополнительным ограничением.

В том случае, если на этапе 2 решалась задача на поиск **максимума** критерия f_1, то дополнительное ограничение имеет вид $f_1(X) \geq f_1^* - \Delta_1$. Уступка здесь в меньшую сторону, т. к. максимум функции уже найден.

В случае, если на этапе 2 решалась задача на поиск **минимума** критерия f_1, то дополнительное ограничение имеет вид $f_1(X) \le f_1^* + \Delta_1$. Уступка здесь в большую сторону, т. к. найден минимум функции.

5 После нахождения оптимального решения f_2^* по критерию $f_2(X)$ назначается по нему уступка и решается задача по третьему критерию с двумя дополнительными ограничениями по первым двум критериям.

6 Решение задачи продолжается до тех пор, пока не будет найдено значение наименее важного критерия при уступках по остальным критериям.

В данном методе видно, ценой какой уступки в одном показателе приобретается выигрыш в другом показателе и какова величина этого выигрыша.

Если ЛПР устраивают значения полученных критериев, то задача считается решенной. В противном случае изменяются величины уступок, и задача решается заново.

Пример – Решить задачу методом последовательных уступок, если уступка по первому критерию составляет 10 % от его оптимального значения:

$$F(X) = \begin{cases} f_1 = x_1 + 3x_2 \to \max; \\ f_2 = 40x_1 + 10x_2 \to \max \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 90; \\ x_1 + x_2 \le 60; \\ x_2 \le 50; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение.

1 Поскольку в задаче указано, по какому критерию назначена уступка 10 %, то данный (первый) критерий считается самым важным.

2 Далее необходимо решить в *Excel* однокритериальную задачу ЛП по критерию f_1:

$$F(X) = \{f_1 = x_1 + 3x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 90; \\ x_1 + x_2 \le 60; \\ x_2 \le 50; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Полученное оптимальное решение составит $f_1^* = 160$.

3 В соответствии с условием задачи величина уступки равна $\Delta_1 = 0{,}1 \cdot 160 = 16$. Дополнительное ограничение будет иметь вид $f_1(X) \ge f_1^* - \Delta_1$, то есть $x_1 + 3x_2 \ge 160 - 16$. При решении в *Excel* задачи

$$F(X) = \{f_2 = 40x_1 + 10x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 90; \\ x_1 + x_2 \le 60; \\ x_2 \le 50; \\ x_1 + 3x_2 \ge 144; \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

получено оптимальное решение задачи $X^* = (18, 42)$. При подстановке вектора X^* в выражения для целевых функций получены следующие значения экстремумов целевых функций: $f_1(X^*) = 144$, $f_2(X^*) = 1140$.

Метод равных и наименьших относительных отклонений.

В этом методе вместо многокритериальной задачи решается несколько однокритериальных задач по каждому из критериев в отдельности следующим образом.

1 Находится оптимальное решение f_k^* по каждому из критериев по отдельности. Система ограничений для каждого из критериев одна и та же.

2 Находится относительное отклонение ρ_k для каждого из критериев f_k:

$$\rho_k = \left| \frac{f_k^* - f_k(X)}{f_k^*} \right|, \quad k = \overline{1, K},$$

где f_k^* – экстремальное решение задачи по k-му критерию;

$f_k(X)$ – k-й критерий (целевая функция);

K – количество критериев.

3 На основе условия равенства относительных отклонений $\rho_1 = \rho_k$ к системе ограничений задачи добавляется равенство следующего вида (в количестве $K - 1$):

$$\left| \frac{f_1^* - f_1(X)}{f_1^*} \right| = \left| \frac{f_k^* - f_k(X)}{f_k^*} \right|, \quad k = \overline{2, K}.$$

В каждом последующем добавляемом ограничении слева от знака равенства всегда стоит относительное отклонение ρ_1 – для первого критерия, а справа от знака равенства – относительное отклонение ρ_k – для последующего критерия, $k = \overline{2, K}$.

4 Поскольку относительные отклонения должны быть наименьшими, **итоговая** целевая функция будет иметь вид:

$$\rho = \rho_k \to \min,$$

т. е., целевая функция представляет собой минимум относительного отклонения для какого-то одного критерия (любого, обычно последнего).

Замечания.

1 Чтобы минимизировать критерий f_k, достаточно максимизировать функцию вида $-f_k$, так как $\min(f_k) = -\max(-\min(f_k))$. Таким образом, если **оба** приравниваемые относительные отклонения ρ_k определены по **максимизируемым** критериям, знаки модуля опускаются.

Например, два первых приравниваемых относительных отклонения ρ_1 и ρ_2 определены по максимизируемым критериям:

$$\left|\frac{f_1^* - f_1(X)}{f_1^*}\right| = \left|\frac{f_2^* - f_2(X)}{f_2^*}\right|.$$

Опустив знаки модуля и преобразовав это ограничение, можно получить ограничение вида

$$1 - \frac{f_1(X)}{f_1^*} = 1 - \frac{f_2(X)}{f_2^*}; \quad \text{и далее} \quad \frac{f_1(X)}{f_1^*} - \frac{f_2(X)}{f_2^*} = 0.$$

Если одно из приравниваемых относительных отклонений ρ_k определено по **максимизируемому** критерию, а второе – по **минимизируемому**, то, опустив знаки модуля, перед вторым относительным отклонением ρ_k необходимо поставить знак минус:

$$\left|\frac{f_1^* - f_1(X)}{f_1^*}\right| = -\left|\frac{f_3^* - f_3(X)}{f_3^*}\right|.$$

Опустив знаки модуля и преобразовав это ограничение, можно получить ограничение вида

$$1 - \frac{f_1(X)}{f_1^*} = -\left(1 - \frac{f_3(X)}{f_3^*}\right); \quad \text{и далее} \quad \frac{f_1(X)}{f_1^*} + \frac{f_3(X)}{f_3^*} = 2.$$

2 Решение может быть неэффективным, поэтому предварительно необходимо выделить область компромиссов.

Пример – Решить задачу

$$F(X)=\{f_1=x_1+3x_2, f_2=40x_1+10x_2\}\to \max;$$
$$\begin{cases}2x_1+x_2\le 90;\\ x_1+x_2\le 60;\\ x_2\le 50;\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$

методом равных и наименьших отклонений.

Решение. При решении только по первому критерию задачи вида

$$F(X)=\{f_1=x_1+3x_2\}\to \max;$$
$$\begin{cases}2x_1+x_2\le 90;\\ x_1+x_2\le 60;\\ x_2\le 50;\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$

с помощью надстройки *Excel Поиск решения* можно найти f_1^*=160.

2 При решении только по второму критерию задачи вида

$$F(X)=\{f_2=40x_1+10x_2\}\to \max$$
$$\begin{cases}2x_1+x_2\le 90\\ x_1+x_2\le 60\\ x_2\le 50\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$

можно найти f_2^*=1800.

3 Относительные отклонения для каждого критерия:

$$\rho_1=\left|\frac{160-x_1-3x_2}{160}\right|,\quad \rho_2=\left|\frac{1800-40x_1-10x_2}{1800}\right|.$$

4 Поскольку оба критерия максимизируются, знак модуля можно опустить. Приравнивая величины отклонений $\rho_1=\rho_2$, можно получить дополнительное ограничение вида $\dfrac{f_1(X)}{f_1^*}-\dfrac{f_2(X)}{f_2^*}=0$:

$$23x_1=19x_2;$$
$$23x_1-19x_2=0.$$

5 **Итоговая** целевая функция будет иметь вид:

$$\rho = \rho_2 = 1 - \frac{40x_1 + 10x_2}{1800} \to \min .$$

При решении этой задачи в *Excel* с помощью надстройки *Поиск решения* в отдельную ячейку на том же листе *Excel* для вычисления итоговой целевой функции вводится формула для вычисления ρ.

6 Окончательно задача примет вид:

$$\rho = 1 - \frac{40x_1 + 10x_2}{1800} \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 90; \\ x_1 + x_2 \le 60; \\ x_2 \le 50; \\ 23x_1 - 19x_2 = 0; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

В результате решения X^* =(27,1; 32,9). Подставив этот вектор X^* в выражения для целевых функций, можно получить экстремумы целевых функций f_1 (X^*) = 125,7; f_2 (X^*) = 1414.

9.2 Задание

Варианты задач представлены в таблице 9.1.

Таблица 9.1 – Варианты задач

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Номера задач	1, 10, 11	2, 7, 12	3, 6, 11	4, 9, 12	5, 8, 11	1, 7, 12	2, 10, 11	3, 9, 12	4, 8, 11	5, 6, 12	1, 8, 11	2, 9, 12	3, 10, 11	4, 6, 12	5, 7, 11

Для задачи, входящей в группу задач под номерами 1–10 (таблица 9.2), необходимо:

1) найти компромиссное решение задачи методом последовательных уступок, считая, что отклонение второго критерия от его значения 20 %;

2) решить эту же задачу методом равных и наименьших отклонений.

Отчет о лабораторной работе должен содержать разделы: тема и цель работы; условия задач и экономико-математические модели задач по варианту; результаты решения с помощью надстройки *Excel Поиск решения*.

Таблица 9.2 – Математические модели задач под номерами 1-10

Номера задач	Математические модели задач	Номера задач	Математические модели задач
1	$F(X)=\begin{cases} f_1 = 5x_1 + 10x_2 \to \max; \\ f_2 = 2x_1 + 4x_2 \to \min; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \le 10; \\ -x_1 - 2x_2 \le 5; \\ 3x_1 + x_2 \le 2; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	6	$F(X)=\begin{cases} f_1 = 10x_1 + 20x_2 \to \max; \\ f_2 = 15x_1 + 7x_2 \to \min; \end{cases}$ $\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 \ge 1; \\ 7x_1 + 7x_2 \ge 1; \\ 3x_1 + 3x_2 \le 1; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
2	$F(X)=\begin{cases} f_1 = 7x_1 + 12x_2 \to \max; \\ f_2 = 10x_1 + 4x_2 \to \min; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \ge 5; \\ 4x_1 + 2x_2 \le 7; \\ 7x_1 + 6x_2 \ge 10; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	7	$F(X)=\begin{cases} f_1 = 8x_1 + 3x_2 \to \max; \\ f_2 = 4x_1 + 10x_2 \to \min; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x_1 - 10x_2 \le 8; \\ 4x_1 - 3x_2 \ge 2; \\ 7x_1 - x_2 \le 15; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
3	$F(X)=\begin{cases} f_1 = 4x_1 + 2x_2 \to \max; \\ f_2 = x_1 + 2x_2 \to \min; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 18; \\ x_1 + 7x_2 \ge 5; \\ 3x_1 + x_2 \le 2; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	8	$F(X)=\begin{cases} f_1 = 3x_1 + 9x_2 \to \max; \\ f_2 = 7x_1 + 11x_2 \to \min; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \le 100; \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 8; \\ 3x_1 + 6x_2 \ge 100; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
4	$F(X)=\begin{cases} f_1 = 4x_1 + 8x_2 \to \max; \\ f_2 = 3x_1 + 6x_2 \to \max; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 10; \\ x_1 + 4x_2 \ge 15; \\ 7x_1 + 8x_2 \le 30; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	9	$F(X)=\begin{cases} f_1 = 8x_1 + 2x_2 \to \max; \\ f_2 = 9x_1 + 3x_2 \to \min; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x_1 - 10x_2 \le 10; \\ 2x_1 + 2x_2 \le 4; \\ 5x_1 + 2x_2 \le 3; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
5	$F(X)=\begin{cases} f_1 = 2x_1 + 12x_2 \to \max; \\ f_2 = 4x_1 + 10x_2 \to \max; \end{cases}$ $\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 \le 11; \\ 2x_1 + 7x_2 \le 3; \\ 8x_1 + 2x_2 \ge 9; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	10	$F(X)=\begin{cases} f_1 = 9x_1 + 4x_2 \to \min; \\ f_2 = 8x_1 + 5x_2 \to \min; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \le 7; \\ 7x_1 + 14x_2 \le 5; \\ 8x_1 + 2x_2 \ge 1; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

Задача 11. Предприятие планирует к производству три вида продукции. Для производства продукции используются три вида ресурсов. Данные о расходе ресурсов и их наличии на планируемый период представлены в таблице 9.3. Предприятие должно изготовить не менее 1 единицы продукции первого вида и 2 единицы продукции второго вида. Требуется найти компромиссное решение методом равных и наименьших относительных отклонений по трем критериям:

прибыли, затратам трудовых ресурсов и стоимости. Численные значения этих показателей для первого, второго и третьего видов продукции следующие: прибыль – (1,5; 2,8; 2,5), трудовые затраты – (4; 4; 5), стоимость – (8; 3; 5).

Таблица 9.3 – Исходные данные к задаче 11

Ресурсы	Расход ресурсов на единицу продукции			Наличие ресурсов
	I	II	III	
Оборудование	8	11	5	84
Материалы	10	7	10	77
Финансы	7	8	7	64

Таблица 9.4 – Исходные данные к задаче 12

Ресурсы	Расход ресурсов на единицу продукции			Наличие ресурсов
	I	II	III	
Ресурс 1	2	4	4	400
Ресурс 2	3	2	2	300
Ресурс 3	4	5	3	500

Задача 12. Для производства трех видов продукции предприятие использует три вида ресурсов. Данные о расходе ресурсов и их наличии на планируемый период представлены в таблице 9.4. Единица продукции каждого вида характеризуется следующими показателями, представленными векторами: прибылью P (22; 12; 14), оптовой ценой C (24; 16; 30) и трудоемкостью T (20; 10; 15). Третьего вида продукции должно быть произведено не менее 30 единиц. Требуется найти компромиссное решение задачи методом последовательных уступок при следующей важности критериев: прибыль, оптовая цена, трудоёмкость. Уступка по прибыли 580 и оптовой цене 1090. Объёмы производства должны быть выражены в целых числах.

Контрольные вопросы

1 Какие задачи рассматриваются в векторной оптимизации?

2 Что такое план решения задачи, оптимальный по Парето?

3 В чем сущность метода последовательных уступок и метода равных и наименьших относительных отклонений?