

Решение задач динамического программирования.

Цель работы: ознакомиться с теорией динамического программирования.

1. Общие сведения

Задачи на оптимальное распределение ресурсов по различным категориям мероприятий возникают в производственной практике особенно часто. Это могут быть задачи о распределении средств на приобретение оборудования, закупку сырья и найме рабочей силы; задачи о распределении товаров по торговым и складским помещениям; задачи о распределении средств между различными отраслями промышленности и т. п.

Рассмотрим пример широко распространенной задачи, в которой решается вопрос о том, как спланировать работу группы предприятий, чтобы экономический эффект от выделенных этим предприятиям дополнительных финансовых или материальных ресурсов был максимальным.

Пример. Производственное объединение выделяет четырем входящим в него предприятиям кредит в сумме 100 млн ден. ед. для расширения производства и увеличения выпуска продукции. По каждому предприятию известен возможный прирост $z_i(u_i)$ ($i=\overline{1,4}$) выпуска продукции (в денежном выражении) в зависимости от выделенной ему суммы u_i . Для упрощения вычислений выделяемые суммы кратны 20 млн ден. ед. (табл. 1). При этом предполагаем, что прирост выпуска продукции на i -м предприятии не зависит от суммы средств, вложенных в другие предприятия, а общий прирост выпуска в производственном объединении равен сумме приростов, полученных на каждом предприятии объединения.

Таблица 1

Выделяемые средства u_i , млн. ден. ед.	Предприятие			
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
	Прирост выпуска продукции на предприятиях $z_i(u_i)$, млн. ден. ед.			
	$z_1(u_i)$	$z_2(u_i)$	$z_3(u_i)$	$z_4(u_i)$
20	10	12	11	16
40	31	26	36	37
60	42	36	45	46
80	62	54	60	63
100	76	78	77	80

Требуется так распределить кредит между предприятиями, чтобы общий прирост выпуска продукции на производственном объединении был максимальным.

Решение. В рассматриваемой задаче физической системой S является производственное объединение, а в качестве шага процесса принятия решения следует понимать назначение той или иной суммы средств конкретному предприятию: на первом шаге — первому предприятию, на втором — второму и т. д. В данном случае процесс разбивается на четыре шага.

Состояние производственного объединения (состояние системы S) будет характеризоваться в каждый данный момент конкретным вариантом распределения кредита между предприятиями. Состояние производственного объединения (состояние системы S) перед выбором размера суммы, ассигнуемой i -му предприятию (перед i -м шагом), определяется величиной остатка кредита после выделения средств другим $i-1$ предприятиям (на предшествующих $i-1$ шагах). Поскольку возможны различные варианты распределения средств (от 0 до 100 млн. ден. ед.), то и состояния

производственного объединения перед i -м шагом могут быть различными, и каждое из них будет характеризоваться соответствующим значением оставшейся суммы. Совокупность этих значений и составит множество x_{i-1} . Этим же символом обозначим и множество состояний системы перед i -м шагом.

Принятое на i -м шаге решение (управление) о сумме средств, выделяемых i -му предприятию, будет зависеть от величины остатка кредита к моменту выделения средств i -му предприятию (к началу i -го шага), а потому может принимать различные значения, совокупность которых и составляет множество u_i . Этим же символом будем обозначать и множество управлений на i -м шаге. В соответствии с условием задачи элементами множества u_i будут числа 0, 20, 40, 60, 80 и 100.

Состояние производственного объединения после выделения средств i -му предприятию (состояние системы S в конце i -го шага) определяется величиной нераспределенной суммы средств, которая может быть различной в зависимости от выделенной i -му предприятию суммы (от выбранного управления из множества u_i), а потому и состояние объединения (состояние системы S) будет характеризоваться одним из элементов множества состояний в конце i -го шага, т. е. множества x_i . В условиях данной задачи элементами множества x_i будут числа 0, 20, 40, 60, 80, 100.

Целевая функция $z_i(x_{i-1}, u_i)$ означает прирост выпуска продукции на i -м предприятии при условии, что величина остатка кредита перед выделением ему выбранной из множества u_i ($c - x_{i-1}$, где c – имеющаяся сумма на данный момент) суммы определялась элементом множества x_i . Выражение $F_i(x_{i-1}, u_i)$ означает максимальный суммарный прирост, полученный на всех предприятиях, начиная с i -го, при условии, что перед выделением этому предприятию некоторой допустимой суммы, равной элементу множества u_i , остаток кредита характеризовался некоторым элементом множества x_{i-1} .

Процедуру условной оптимизации начинаем с первого предприятия: пусть все средства выделяются первому предприятию. Тогда прирост составит:

$$f_1(c) = \max_{0 \leq x \leq c} (g_1(x)) = g_1(x)$$

В результате получаем следующую таблицу:

Таблица 2

$x_1 = c$	$f_1(c)$
20	10
40	31
60	42
80	62
100	76

Предположим теперь, что средства вкладываются в два предприятия. Тогда

$$f_2(c) = \max_{0 \leq x \leq c} (g_2(x) + f_1(c-x))$$

Вычисления занесем в таблицу:

Таблица 3

$c \backslash x$	0	20	40	60	80	100	x_2	$f_2(c)$
20	0+10	12+0	-	-	-	-	20	12
40	0+31	12+10	26+0	-	-	-	0	31
60	0+42	12+31	26+10	36+0	-	-	20	43
80	0+62	12+42	26+31	36+10	54+0	-	0	62

100	0+76	12+62	26+42	36+31	54+10	78+0	100	78
-----	------	-------	-------	-------	-------	------	-----	----

Предположим, что средства вкладываются в три предприятия. Тогда

$$f_3(c) = \max_{0 \leq x \leq c} (g_3(x) + f_2(c-x))$$

Вычисления занесем в таблицу:

Таблица 4

$c \backslash x$	0	20	40	60	80	100	x_3	$f_3(c)$
20	0+12	11+0	-	-	-	-	0	12
40	0+31	11+12	36+0	-	-	-	40	36
60	0+43	11+31	36+12	45+0	-	-	40	48
80	0+62	11+43	36+31	45+12	60+0	-	40	67
100	0+78	11+62	36+43	45+31	60+12	77+0	40	79

Наконец, предположим, что средства вкладываются в четыре предприятия. Тогда

$$f_4(c) = \max_{0 \leq x \leq c} (g_4(x) + f_3(c-x))$$

Вычисления занесем в таблицу:

Таблица 5

$c \backslash x$	0	20	40	60	80	100	x_4	$f_4(c)$
20	0+12	16+0	-	-	-	-	20	16
40	0+36	16+12	37+0	-	-	-	40	37
60	0+48	16+36	37+12	46+0	-	-	20	52
80	0+67	16+48	37+36	46+12	63+0	-	40	73
100	0+79	16+67	37+48	46+36	63+12	80+0	40	85

Все вычисления занесем в сводную таблицу:

Таблица 6

c	x_1	$f_1(c)$	x_2	$f_2(c)$	x_3	$f_3(c)$	x_4	$f_4(c)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	20	10	<u>20</u>	<u>12</u>	0	12	20	16
40	40	31	0	31	4	36	40	37
60	60	42	20	43	<u>40</u>	<u>48</u>	20	52
80	80	62	0	62	40	67	40	73
100	100	76	100	78	40	79	<u>40</u>	<u>85</u>

Из таблицы 6 видно, что при кредите в 100 млн. ден. ед. максимальный прирост выпуска продукции на всех четырех предприятиях составляет 85 млн ден. ед., если четвертому предприятию будет выделено 40 млн. ден. ед., остаток кредита составит при этом $100-40=60$ млн. ден. ед.

Если в наличии имеется 60 млн. ден. ед., то максимальный прирост продукции будет, если 40 млн. ден. ед. вложить в третье предприятие, остается $60-40=20$ млн. ден. ед.

Найденное оптимальное распределение кредита можно записать в виде вектора $(0; 20; 40; 40)$. Именно такое распределение обеспечивает производственному объединению максимальный прирост выпуска продукции в 85 млн ден. ед.

Заметим в заключение, что, решив поставленную задачу о нахождении оптимального распределения 100 млн ден. ед. между четырьмя предприятиями, мы попутно получили возможность найти оптимальные распределения кредита в 20, 40, 60 и 80 млн ден. ед. между теми же предприятиями.

2. Порядок выполнения работы

- 2.1. Ознакомится с методическими указаниями, изложенными в п.1;
- 2.2. Решить задачи (по указанию преподавателя)
- 2.3. Подготовить ответы на контрольные вопросы

3. Содержание отчета:

- 3.1. Тема и цель работы
- 3.2. Условия задач
- 3.3. Подробное решение и результаты
- 3.4. Выводы по работе.

Контрольные вопросы.

1. Что лежит в основе метода ДП?
2. Что такое рекуррентное соотношение?
3. Как формулируется задача оптимального распределения инвестиций?
4. Запишите функциональные уравнения Беллмана, используемые на каждом шаге управления в задаче оптимального распределения инвестиций.

Список задач

1. Производственному объединению из четырех предприятий выделяется банковский кредит в сумме 60 млн. ден. ед. для реконструкции и модернизации производства с целью увеличения выпуска продукции. Значения $g_i(x_i)$ ($i = 1,4$) дополнительного дохода, получаемого на предприятиях объединения в зависимости от выделенной суммы, приведены в таблице. Распределить выделенный кредит между предприятиями так, чтобы дополнительный доход объединения был максимальным.

Выделенные средства x_i млн. ден. ед.	Предприятие			
	№1	№2	№3	№4
	Получаемый доход, млн. ден. ед.			
	$g_1(x_i)$	$g_2(x_i)$	$g_3(x_i)$	$g_4(x_i)$
20	9	11	16	13
40	18	19	32	27
60	24	30	40	44

2. Имеются 4 предприятия, между которыми распределяется 100 тыс. ден. ед. Значения прироста выпуска продукции на предприятиях в зависимости от выделенной суммы приведены в таблице. Составить план распределения средств, максимизирующий общий прирост выпуска продукции.

2.1

Средства c , тыс. ден. ед.	Предприятия			
	№1	№2	№3	№4
	Прирост, тыс. ден. ед.			
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
20	9	11	16	13
40	18	19	32	27
60	24	30	40	44
80	38	44	57	69
100	50	59	70	73

2.4

Средства c , тыс. ден. ед.	Предприятия			
	№1	№2	№3	№4
	Прирост, тыс. ден. ед.			
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
20	11	13	10	10
40	21	20	22	27
60	40	42	34	33
80	54	45	55	57
100	62	61	60	69

2.2

Средства c , тыс. ден. ед.	Предприятия			
	№1	№2	№3	№4
	Прирост, тыс. ден. ед.			
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
20	7	9	17	16
40	29	19	27	30
60	37	28	37	42
80	41	37	48	65
100	59	46	66	81

2.5

Средства c , тыс. ден. ед.	Предприятия			
	№1	№2	№3	№4
	Прирост, тыс. ден. ед.			
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
20	12	16	9	15
40	26	21	17	25
60	40	36	35	51
80	60	49	51	62
100	72	63	65	76

2.3

Средства с, тыс. ден. ед.	Предприятия			
	№1	№2	№3	№4
	Прирост, тыс. ден. ед.			
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
20	9	8	12	7
40	18	19	25	15
60	29	30	51	52
80	41	47	58	59
100	60	58	69	60

2.6

Средства с, тыс. ден. ед.	Предприятия			
	№1	№2	№3	№4
	Прирост, тыс. ден. ед.			
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
20	14	12	13	7
40	24	30	25	33
60	37	42	45	46
80	45	58	62	60
100	58	71	70	68