Лабораторная работа № 9

Анализ и оптимизация решений на основе моделей игрового программирования

<u>Цель работы</u>: ознакомление с теорией матричных игр

1. Общие сведения

Рассмотрим игру, в которой игрок A имеет m стратегий, а игрок B («противник») - n стратегий. Такая игра называется игрой $m \times n$. Наши стратегии будем обозначать $A_1, A_2, \dots A_m$, противника - $B_1, B_2, \dots B_n$. Предположим, что каждая сторона выбрала определенную стратегию: мы выбрали A_i, противник B_j. Выбор стратегии однозначно определяет исход игры – наш выигрыш, обозначим его a_{ij}.

Предположим, что нам известны значения a_{ij} для каждой пары стратегий. Эти значения можно записать в виде прямоугольной таблицы. Такая таблица называется платежной матрицей.

$A_i \setminus B_j$	B_1	B_2	$\dots$	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}

Решение матричной игры начинается с нахождения нижней и верхней цены игры.

Число $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$ называют *нижней чистой ценой игры* (максимином), а соответствующую ему чистую стратегию – максиминной.

Число α показывает, какой минимальный гарантированный выигрыш может получить игрок А, правильно применяя свои чистые стратегии при любых действиях игрока В.

Число $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$ называют *верхней чистой ценой игры* (минимаксом), а соответствующую чистую стратегию минимаксной.

Число β показывает, какой минимальный гарантированный проигрыш может быть у игрока В, при правильном выборе им своих чистых стратегии независимо от действий игрока А.

Ясно, что $\alpha \le \beta$.

Если $\alpha = \beta$, то говорят, что игра имеет седловую точку в чистых стратегиях и чистую цену игры $v = \alpha = \beta$. Стратегии образующие седловую точку, являются оптимальными. Тройку ($A_i^*; B_j^*; v$) называют решением игры.

Для игр без седловых точек оптимальные стратегии игроков находятся в области смешанных стратегий.

Смешанной стратегией игрока А называют вектор $\overline{p} = (p_1, p_2 \dots, p_m)$, компоненты которого удовлетворяют условиям $p_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,m})$; $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Смешанной стратегией игрока B называют вектор $\bar{q} = (q_1, q_2 \ldots, q_n)$, компоненты которого удовлетворяют условиям $q_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n})$; $\quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

p_i и q_j - вероятности, с которыми игроки А и В выбирают свои чистые стратегии A_i и B_j в ходе игры.

Для стратегической игры поиск оптимальных смешанных стратегий начинают с упрощения платежной матрицы. Если в платежной матрице элементы *k*-й строки не меньше соответствующих элементов *s*-й строки, т. е. $a_{kj} \geq a_{sj} \ (j = \overline{1,n})$, то говорят, что стратегия A_k доминирует над стратегией A_s. Аналогично, если элементы *l*-го столбца не превосходят соответствующих элементов *r*-го столбца, т. е. $a_{il} \leq a_{ir} \ (i = \overline{1,m})$, то говорят, что стратегия B_l доминирует над стратегией B_r. Частным случаем доминирования стратегий является дублирование стратегий, когда $a_{kj} = a_{sj} \ (j = \overline{1,n})$ или $a_{il} = a_{ir} \ (i = \overline{1,m})$. Исключение из платежной матрицы доминируемых стратегий (ими игрокам пользоваться заведомо невыгодно) позволяет уменьшить ее размерность, а это упрощает решение игры. Вероятность применения доминируемых стратегий равна нулю.

Оптимальные смешанные стратегии $\bar{p}^*$ и $\bar{q}^*$ в игре с платежной матрицей $\lfloor a_{ij} \rfloor_{m \times n}$ и ценой *v* остаются оптимальными и для игры с платежной матрицей $\lfloor b a_{ij} + c \rfloor_{m \times n}$ (где *b* > 0) и ценой *bv* + *c*. На этом основании платежную матрицу можно всегда преобразовать так, что ее элементы будут целыми неотрицательными числами, а это упрощает расчеты.

Методы решения матричных игр

Решение матричной игры сведением к задаче линейного программирования

Пусть игра задана платежной матрицей.

$A_i \setminus B_j$	B_1	B_2	$\ldots$	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}

Оптимальные смешанные стратегии $\bar{p}^* = (p_1^*, p_2^* \ldots, p_m^*)$ и $\bar{q}^* = (q_1^*, q_2^* \ldots, q_n^*)$ игроков А и В могут быть найдены в результате решения пары двойственных задач линейного программирования.

Для игрока А:

$$\left.\begin{aligned} f = \sum_{i=1}^{m} x_i \quad (\min); \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1 \ (j = \overline{1,n}); \\ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1,m}). \end{aligned}\right\}$$

В результате решения задачи находятся оптимальный вектор $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^* \dots, x_m^*)$ и $f^* = f_{\min}$, а затем $v = 1/f_{\min}$; $p_i^* = vx_i^*$ $(i = \overline{1,m})$.

Для игрока В:

$$\left.\begin{aligned} z = \sum_{j=1}^{n} y_j \quad (\max); \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1 \; (i = \overline{1,m}); \\ y_j \ge 0 \; (j = \overline{1,n}). \end{aligned}\right\}$$

Решая задачу , находят оптимальный вектор $\overline{y}^* = (y_1^*, y_2^* \dots, y_n^*)$ и $z^* = z_{\max}$, а затем $v = 1/z_{\max}$; $q_j^* = vy_j^*$ $(j = \overline{1,n})$.

Решение матричной игры графическим методом

При поиске оптимальных стратегий в матричных играх размерностей $2 \times n$ и $m \times 2$ целесообразно использовать графический метод решения задач линейного программирования и свойства оптимальных планов пары двойственных задач: *если в оптимальном плане задачи переменная положительна, то соответствующее ограничение двойственной задачи ее оптимальным планом обращается в равенство; если оптимальным планом задачи ограничение обращается в строгое неравенство, то в оптимальном плане двойственной задачи соответствующая переменная равна нулю.*

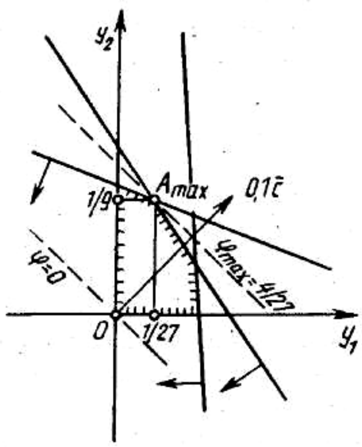
Пример. Решить игру с платежной матрицей $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 12 & 1 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ графическим методом.

Решение. В данном случае α = 6, β = 8, т.е. $\alpha \ne \beta$, а поэтому для определения оптимальных смешанных стратегий игроков составляем задачи

$$f = x_1 + x_2 + x_3 \; (\min)$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 12x_2 + 9x_3 \ge 1; \\ 8x_1 + \quad x_2 + 6x_3 \ge 1; \\ \quad x_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,3}). \end{cases} \qquad (1)$$

$$\varphi = y_1 + y_2 \; (\max)$$
$$\begin{cases} 3y_1 + 8y_2 \le 1; \\ 12y_1 + \; y_2 \le 1; \\ 9y_1 + 6y_2 \le 1; \\ \quad y_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,2}). \end{cases} \qquad (2)$$

Поскольку одна из задач содержит две переменные, то, решим ее графически, находим: y_1^*=1/27, y_2^*=1/9, $\varphi_{\max}$=4/27. Используя формулы $v = 1/z_{\max}$; $q_j^* = vy_j^*$ $(j = \overline{1,n})$, получаем: $v = 27/4$, $q_1^* = 1/4$, $q_2^* = 3/4$.



Для определения оптимальной смешанной стратегии $\overline{p}^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^*)$ найдем сначала решение двойственной задачи. В оптимальном плане задачи (2) $y_1^* > 0$ и $y_2^* > 0$, поэтому оба ограничения двойственной задачи (1) ее оптимальным планом $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ обращаются в равенства. Кроме того, значениями y_1^* и y_2^* второе ограничение задачи (2) обращается в строгое неравенство. Следовательно, в оптимальном плане задачи (1) соответствующая ему вторая переменная равна нулю, т. е. x_2^*=0. Учитывая сказанное, для определения x_1^* и x_3^* получаем уравнения $3x_1 + 9x_3 = 1$ и $8x_1 + 6x_3 = 1$, совместное решение которых дает x_1^*= 3/54, x_3^*= 5/54. Используя формулы $v = 1/f_{\min}$; $p_i^* = vx_i^*$ $(i = \overline{1,m})$, определяем p_1^*=3/8, p_2^*=0, p_3^*=5/8. Итак, решение игры найдено:

$$\overline{p}^* = (3/8,\, 0,\, 5/8); \quad \overline{q}^* = (1/4,\ 3/4); \quad v = 27/4\,.$$

Решение игр с природой по различным критериям

Будем предполагать, что в игре с природой сознательный игрок *А* может использовать m чистых стратегий $A_1, A_{2,} \ldots A_m$, а природа *П* может реализовывать n различных состояний $П_1, П_{2,} \ldots П_n$. Игроку *А* могут быть известны вероятности $q_1, q_{2,} \ldots q_n$, с которыми природа реализует свои состояния, но он может и не знать их. Действуя против природы, игрок *А* имеет возможность использовать как чистые стратегии A_i так и смешанные стратегии $\overline{p} = (p_1, p_2 \ldots, p_m)$. Если игрок *А* в состоянии оценить (величиной a_{ij}) последствия применения каждой своей чистой стратегии A_i при любом состоянии $П_j$ природы, то игру можно задать матрицей.

$A_i \setminus П_j$	$П_1$	$П_2$	$\ldots$	$П_n$
A_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}

Поскольку игры с природой являются частным видом парных матричных игр, то вся теория стратегических игр переносится и на игры с природой. Однако игры с природой обладают и некоторыми особенностями. Например, при упрощении платежной матрицы отбрасывать те или иные состояния природы нельзя, так как она может реализовать любое состояние независимо от того, выгодно оно игроку *А* или нет. Другая особенность состоит в том, что решение достаточно найти только для игрока *А,* поскольку природа наши рекомендации воспринять не может. И ещё одна важная особенность: в играх с природой смешанные стратегии имеют ограниченное (главным образом теоретическое) значение: не всегда можно для них найти форму, удобную для использования в реальной обстановке. Смешанные стратегии приобретают смысл только при многократном повторении игры. В свете последнего замечания более естественными в играх с природой являются рекомендации в чистых стратегиях игрока *А*.

С учетом отмеченных особенностей сформулирован ряд критериев, которыми пользуются при выборе оптимальных стратегий игрока *А* в ситуациях, моделирующихся в игры с природой. Эти критерии основываются на здравом смысле, интуиции и практической целесообразности. Они дают некоторую логическую схему принятия решения. Критерии позволяют последовательным численным анализом ситуации с разных точек зрения оценить принимаемое решение и высказать рекомендации по тому или иному образу действий и тем самым выбрать что-то определенное. Если рекомендации, вытекающие из различных критериев, совпадают, принимается рекомендуемое решение. Если же рекомендации критериев противоречат друг другу, то необходимо сравнить, насколько значительно отличаются результаты по разным критериям, привлечь дополнительную информацию и сделать окончательный выбор.

При выборе оптимальной стратегии игрока *А* опираются как на платежную матрицу, так и на матрицу рисков. *Риском* r_{ij} *игрока А,* когда он пользуется чистой стратегией A_i при состоянии Π_j природы, называется разность между максимальным выигрышем, который он мог бы получить, если бы достоверно знал, что природой будет реализовано именно состояние Π_j, и тем выигрышем, который он получит, используя стратегию A_i в неведении о том, какое же состояние Π_j природа реализует. Таким образом, элементы r_{ij} матрицы рисков определяются по формуле $r_{ij} = \beta_j - a_{ij} \ge 0$, где β_j — максимально возможный выигрыш игрока *А* при состоянии Π_j (максимальный элемент *j*-го столбца платежной матрицы, т.е. $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$). Итак, исследуя платежную матрицу, мы стремимся выбрать такое решение, чтобы выигрыш игрока *А* максимизировался, а анализируя матрицу рисков, стараемся минимизировать неизбежный риск, сопровождающий выбор решения.

$A_i \setminus \Pi_j$	Π_1	Π_2	$\ldots$	Π_n	r_i
A_1	r_{11}	r_{12}	$\ldots$	r_{1n}	r_1
A_2	r_{21}	r_{22}	$\ldots$	r_{2n}	r_2
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
A_m	r_{m1}	r_{m2}	$\ldots$	r_{mn}	r_m

Если вероятности q_j состояний Π_j природы известны, то пользуются *критерием Байеса,* в соответствии с которым оптимальной считается чистая стратегия A_i, при которой максимизируется средний выигрыш $\bar{a}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$ игрока *А*, т. е. обеспечивается

$$\max_i \bar{a}_i = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j .$$

Если игроку *А* представляются в равной мере правдоподобными все состояния Π_j природы, то иногда полагают $q_1 = \ldots = q_n = 1/n$ и, учитывая "принцип недостаточного основания" Лапласа, оптимальной считают чистую стратегию A_i, обеспечивающую

$$\max_i \bar{a}_i = \frac{1}{n} \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} .$$

Если вероятности q_j состояний совсем неизвестны и нельзя сделать о них никаких предположений, то пользуются критериями Вальда, Сэвиджа и Гурвица. Оптимальной по *критерию Вальда* считается чистая стратегия A_i, при которой наименьший выигрыш игрока *А* будет максимальным, т.е. ему обеспечивается $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$. В соответствии с этим критерием игра ведется как с разумным партнером, противодействующим игроку A в достижении успеха. Критерий рекомендует игроку A ожидать наихудшего результата и в этом предположении искать наиболее благоприятный исход (выигрыш), который совпадает с нижней чистой ценой игры. Критерий Вальда выражает позицию крайнего пессимизма, и принимаемое решение носит заведомо перестраховочный характер. Однако этот критерий имеет право на применение в практике вместе с другими критериями, оценивающими исследуемую ситуацию с других точек зрения.

Оптимальной по *критерию Сэвиджа* считается та чистая стратегия A_i, при которой минимизируется величина r_{ij} максимального риска, т. е. обеспечивается $\min\limits_i \max\limits_j r_{ij}$. Таким образом, критерий Сэвиджа советует ориентироваться не на выигрыш, а на риск. Это тоже критерий крайнего пессимизма, но здесь пессимизм понимается в ином свете: рекомендуется всячески избегать большого риска при принятии решения.

Оптимальной по *критерию Гурвица* считается чистая стратегия A_i, найденная из условия

$$\max_i(\gamma \min_j a_{ij} + (1-\gamma)\max_j a_{ij}),$$

где γ принадлежит интервалу (0; 1) и выбирается из субъективных соображений. При $\gamma=1$ критерий Гурвица превращается в критерий Вальда, при $\gamma = 0$ — в критерий крайнего оптимизма, когда рекомендуется выбирать стратегию, обеспечивающую самый большой выигрыш. В связи с этим критерий Гурвица называют критерием пессимизма-оптимизма. При $0 < \gamma < 1$ получается нечто среднее между тем и другим. Чем ответственнее ситуация, чем больше стремление подстраховаться в ней и не рисковать без должных оснований, тем ближе к единице выбирается коэффициент пессимизма γ.

2. Порядок выполнения работы

2.1. Ознакомится с методическими указаниями, изложенными в п.1;
2.2. Решить задачи (по указанию преподавателя)
2.3. Подготовить ответы на контрольные вопросы

3. Содержание отчета

3.1. Тема и цель работы
3.2. Условия задач
3.3. Подробное решение и результаты
3.4. Выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Каковы основные термины и определения теории игр?
2. Каков принцип минимакса?
3. Когда следует использовать смешанные стратегии и как их найти?
4. Каков геометрический метод решения игры?
5. Каковы критерии принятия решения в условиях неопределенности?
6. Когда следует применять критерии Вальда, Гурвица, Сэвиджа?

Список задач

1. Сведение матричной игры к задаче линейной оптимизации

1. Решить матричную игру, сведением к задаче линейного программирования:

1.1 $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ 1.4 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

1.2 $\begin{bmatrix} -4 & -8 & -4 \\ -6 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ 1.5 $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

1.3 $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ 1.6 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

2. Решение игр с природой по различным критериям

2.1 Коммерческая фирма занимается реализацией новогодних игрушек. Спрос на елочные гирлянды может составить 200, 250, 300 или 350 шт. с вероятностями 0,3; 0,1; 0,2; 0,4 соответственно. Фирма закупает гирлянды по 2 ден. ед. за 1 шт., а реализует по 3 ден. ед. Непроданные к Новому году гирлянды реализуются оптом по сниженной цене 1,8 ден. ед. за 1 шт. Определить оптимальную стратегию поведения фирмы.

2.2 Кафетерий «Мечта» реализует кондитерские изделия собственного изготовления. Спрос на пирожные может составить 100, 120, 140 или 160 шт. с вероятностью 0,2; 0,3; 0,4; 0,1 соответственно. Затраты на производство одного пирожного составляют 70 ден. ед., а цена реализации — 100 ден. ед. Если пирожные не продаются в течение 36 ч, они портятся и магазин несет убытки. Какое количество пирожных следует выпекать?

2.3. Туристская фирма «Топ тур» берет на реализацию у фирмы «Смок» туристские путевки. Объем реализации путевок изменяется в зависимости от потребительского спроса в пределах от 6 до 9 ед. Если путевок меньше, чем требует спрос на них, то можно заказать недостающее количество. При этом возникнут дополнительные расходы в размере 4 ден. ед. за каждую новую путевку. А если количество путевок превышает спрос, то потери за невостребованные путевки составят 3 ден. ед. Прибыль от реализации одной путевки составляет 10 ден. ед. Определить, какое количество путевок выгоднее брать на реализацию.

2.4. Сельскохозяйственная бригада может посеять на данном участке одну из культур $К_1$, $К_2$ или $К_3$. Урожайность каждой из культур во многом зависит от погоды, которая может быть засушливой, нормальной или дождливой (влияние других факторов не учитывается). В таблице приведены необходимые числовые данные. Используя игровой подход, составить платежную матрицу, дать рекомендации о том, какую из культур следует сеять на данном участке, чтобы получить наибольший доход. Вывод сделать на основе исследования платежной матрицы по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица (γ=0,7).

Сельско-хозяйственная культура	Цена 1 ц, ден. ед.	Урожайность (ц/га) при погоде		
		засушливой	нормальной	дождливой
$К_1$	2	6	7	6,5
$К_2$	3	3	5	4
$К_3$	4	2,75	4	2,5

2.5. Объём реализации товара Т, за рассматриваемый период времени, колеблется в зависимости от уровня покупательского спроса в пределах от 4 до 7 ед. Прибыль торгового предприятия от единицы реализованного товара Т равна 2 ден.ед. Если заранее запасенного товара окажется недостаточно для полного удовлетворения спроса в рассматриваемый период, можно заказать дополнительное количество товара, что потребует новых затрат на заказывание и доставку в размере 4 ден.ед. в расчете на единицу товара. При этом предполагается, что дополнительно заказанный товар доставляется и полностью реализуется в тот же период времени. Если же запасенный заранее товар полностью реализовать не удастся, то расходы на содержание и хранение остатка в рассматриваемом периоде составят 3 ден.ед. в расчете на единицу товара. На основе анализа платежной матрицы по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица (γ=0,7) высказать рекомендации об оптимальном уровне запаса товара Т на торговом предприятии, обеспечивающем ему наивысшую эффективность работы с учетом торговой прибыли и возможных дополнительных затрат на заказ и доставку товара, содержание и хранение остатка.

2.6. Сельскохозяйственное предприятие имеет возможность выращивать картофель на трех участках: на участке У1 повышенной влажности, У2 средней влажности, У3 сухом. Урожайность картофеля зависит от погодных условий, в частности от количества осадков, выпадающих в течение сезона.. Если осадков выпадает меньше нормы, то средняя урожайность на участке У1 составляет 270 ц/га; при количестве осадков, близком к норме – 220ц; если же осадков выпадает больше нормы, - 110ц; на участке У2 – соответственно 210, 250 и 140 ц.; на участке У3 – 120,260 и 280 ц. Установить, на каком участке следует выращивать картофель в предстоящем году. (Критерии Вальда, Сэвиджа и Гурвица)

3. Решение матричной игры графическим методом

3.1. Произвести возможные упрощения следующих платежных матриц и найти решения игр, используя графический метод решения соответствующих задач линейного программирования и связи между оптимальными планами двойственных задач.

1.1 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & 2 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ 1.4 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 \\ 6 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

1.2 $\begin{bmatrix} 9 & 9 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ 1.5 $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

1.3 $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 6 & -5 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ 1.6 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$